数理逻辑

07 - 命题逻辑的可靠性和完备性

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2026年 - 春季

https://daiwz.net

前情提要

命题逻辑的证明

- 自然演绎
  - 树状证明，矢列
- 公理系统
  - Hilbert式证明
- 演绎定理

命题逻辑公理系统的可靠性

$$\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha$$

可靠性（Soundness）

一个“可靠”的系统，例如希尔伯特提出的公理系统，必须不能推出任何不成立的结论。可靠性（Soundness）是对推导系统的安全性保证，它必须有：

1. 任何可从空集推导出的α都是有效的（valid）
2. 若α是可由某些Γ推导得出，那它必须是其逻辑结论（consequence）
3. 若一个wff集是不一致的，那么它一定是不可满足的

如果不满足这三点，这个推导系统**必然会推出多余的、且不必要的结论**

命题逻辑的可靠性

定理1.27（命题逻辑的可靠性，*soundness*）：

若$\Gamma \vdash \alpha$，那么$\Gamma \vDash \alpha$

命题逻辑公理系统的完备（完全）性

$$\Gamma \vDash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$$

命题逻辑的完备性（Completeness）

定理 1.28（命题逻辑的完备性，*completeness*）：

若$\Gamma \vDash \alpha$，那么$\Gamma \vdash \alpha$

一致性

定义 1.29（一致性，*consistency*）：

一个 wff 集合 Γ 是一致的（*consistent*），当且仅当 $\Gamma \nvdash \perp$

一致性

定理 1.30：

$\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ 不一致

一致性、可满足性与完备性

引理 1.31 [Hao et al., pp.50]：下列命题等价：

1. 若Γ一致，则Γ可满足
2. 若$\Gamma \vDash \alpha$，则$\Gamma \vdash \alpha$

证明完备性的思路

至此，我们或许能够利用关于Γ的一致性来构造一个真值指派v，以使$\bar{v}$能够满足Γ中的任意wff。这种v也被称为Γ的模型（*model*）

命题的完备（完全）集

定义 1.33（完全集，*complete set*）：

一个wff集合Γ被称为完全集当且仅当对任意wff α，要么$\alpha \in \Gamma$，要么$\neg\alpha \in \Gamma$

定理 1.34：

如果Γ是完全且一致的，那么：

1. 若$\Gamma \vdash \alpha$，则$\alpha \in \Gamma$
2. $\alpha \to \beta \in \Gamma$当且仅当要么$\alpha \notin \Gamma$，要么$\beta \in \Gamma$

Lindenbaum 引理

引理 1.35 [Hao et al., pp.50]：

每一个一致的wff集合 Γ 都可被扩张为一个完全且一致的集合（极大一致集）Γ^*

Lindenbaum 引理

引理 1.35 [Hao et al., pp.50]：

每一个一致的 wff 集合 Γ 都可被扩张为一个完全且一致的集合（极大一致集）Γ^*

构造 Γ^* 的模型

定义 1.36：

令 Γ^* 是一个完备一致的wff集合，对其中的每个**原子命题 A** 令

$$v(\Gamma^*) = \begin{cases} T & \text{if } \mathbf{A} \in \Gamma^*; \\ F & \text{if } \mathbf{A} \notin \Gamma^* \end{cases}$$

完备性定理

定理1.28'（命题逻辑的完备性，*completeness*）：

若Γ是一致的，那么Γ可满足

小结

命题逻辑的可靠性和完备性

- 命题逻辑的可靠性
- 命题逻辑的完备性
  - 一致性
  - 紧致性
  - 可满足性
  - Lindenbaum引理