数理逻辑

06 - 命题逻辑的证明

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2026年 - 春季

https://daiwz.net

前情提要

前情提要

- 语义 vs 语法
- 真值指派
- 布尔函数与 wff
- 联词的完全组

证明

$$\Gamma \vdash \alpha$$

两种证明方式

自然演绎（NATURAL DEDUCTION）

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

1.	$(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)$	Assumption
2.	$\alpha \to \beta$	$\land e_1$ 1
3.	α	Assumption
4.	β	$\to$e 1,2
5.	$\beta \to \gamma$	$\land e_2$ 1
6.	γ	$\to$e 4,5
7.	$\alpha \to \gamma$	$\to$i 3,6
8.	$((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	$\to$i 1,7

ND的矢列演算（SEQUENT CALCULUS）

也叫Gentzen式演算（一种由逻辑学家Gerhard Gentzen在1930s发明的树型证明形式）

根岑的LK (der Logistische Kalkül)系统如下，其中$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为主命题，Γ, Δ为辅命题（集）：

核心规则:

$$\frac{}{\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}}\, Ax \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma', \mathbf{A} \vdash \Delta'}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta, \Delta'}\, Cut$$

结构规则:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}\, WR \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}\, WL \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}\, CR \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}\, CL$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Delta'}\, XR \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta}\, XL$$

ND的矢列演算（SEQUENT CALCULUS）

推理规则：

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top R \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \Delta}\ \wedge R \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \wedge L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta}\ \vee R \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \vee L$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta}\ \neg R \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta}\ \neg L$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \Delta}\ \to R \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma', \mathbf{B} \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \Delta, \Delta'}\ \to L$$

ND的矢列演算（SEQUENT CALCULUS）

我们用Gentzen的LK系统来书写以下公式的证明：

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\alpha \vdash \alpha$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\beta \vdash \beta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\gamma \vdash \gamma$}
\RightLabel{$\to L$}
\BinaryInfC{$\beta, (\beta \to \gamma) \vdash \gamma$}
\RightLabel{$\to L$}
\BinaryInfC{$\alpha, (\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma) \vdash \gamma$}
\RightLabel{$\land L$}
\UnaryInfC{$\alpha, (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \vdash \gamma$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \vdash (\alpha \to \gamma)$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$}
\end{prooftree}$$

公理系统推导（AXIOMATIC DERIVATION）

我们所希望的“推导”是由一系列语句构成，它们:

1. 要么来自于推导的前提（premises）
2. 要么是公理（axioms）
3. 要么可从一些逻辑有效的演绎中得到

公理系统推导（AXIOMATIC DERIVATION）

定义1.19（*derivation*）：

若Γ是一个wff集合，那么Γ中的一个推导是一个wff有穷序列$\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$，对任意$i \leq n$有下面三者之一成立：

1. $\alpha_i \in \Gamma$
2. α_i是一条公理
3. α_i根据推理规则从某些α_j（及α_k）得到，其中$j < i$（且$k < i$）
   - 推理规则（*rule of inference*）给出了推理步骤正确性的充分条件

一些 NAÏVE 的推理规则

1. 若 $\alpha \in \Gamma$，那么 α 正确的推导步骤
2. 若 α 是公理，那么 α 是正确的推导步骤
3. 若 $\vDash \alpha$，那么 α 是正确的推导步骤
4. ……

不那么 NAÏVE 的推理规则

可证（$\vdash$）

定义 1.20（可证的，*provable/derivable*）：

若从 Γ 出发，存在一个由 wff α 结束的推导，则称 α 是可由 Γ 推出的/由 Γ 可证的（derivable from Γ），记为

$$\Gamma \vdash \alpha$$

命题逻辑中的公理

定义 1.22（命题逻辑公理，*Axioms for Propositional Connectives*）：

1. $(\alpha \land \beta) \to \alpha$
2. $(\alpha \land \beta) \to \beta$
3. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \land \beta))$
4. $\alpha \to (\alpha \lor \beta)$
5. $\alpha \to (\beta \lor \alpha)$
6. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \lor \beta) \to \gamma))$
7. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
8. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
9. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$
10. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
11. $\top$
12. $\bot \to \alpha$
13. $(\alpha \to \bot) \to \neg\alpha$
14. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

推理规则

定义 1.23（MP规则/分离规则，*Modus ponens*）：

若推导中已有$\beta \to \alpha$和β，那么α也是正确的，即:

$$\beta, (\beta \to \alpha) \vdash \alpha$$

一个例子

试**用命题逻辑公理**证明:

$$\vdash (\neg\delta \vee \varphi) \to (\delta \to \varphi)$$

第二个例子

试**用命题逻辑公理**证明:

$$\vdash \delta \to \delta$$

证明第二个例子的正式写法

试**用命题逻辑公理**证明：

$$\vdash \delta \to \delta$$

证明：

$$\begin{array}{lll}
1. & \delta \to ((\delta \to \delta) \to \delta) & \text{Ax } 1.22.7 \\
2. & (\delta \to ((\delta \to \delta) \to \delta)) \to & \\
 & \quad ((\delta \to (\delta \to \delta)) \to (\delta \to \delta)) & \text{Ax } 1.22.8 \\
3. & (\delta \to (\delta \to \delta)) \to (\delta \to \delta) & 1, 2\ \text{MP} \\
4. & \delta \to (\delta \to \delta) & \text{Ax } 1.22.7 \\
5. & \delta \to \delta & 3, 4\ \text{MP}
\end{array}$$

Q.E.D.

第三个例子

试**用命题逻辑公理**证明亚里士多德的三段论：

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$$

证明：

1.	$\alpha \to \beta$	Hyp.
2.	$\beta \to \gamma$	Hyp.
3.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	Ax 1.22.7
4.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$	2, 3 MP
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	Ax 1.22.8
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	4, 5 MP
7.	$\alpha \to \gamma$	1, 6 MP

Q.E.D.

更多的命题逻辑公理/定理/重言式

随着推理的进行，我们可以不断扩充定理集合：

演绎定理

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

$\vdash$ 的性质

根据上面对推理的定义，我们可断言$\vdash$的几个性质（显然成立）：

- （自反性，*reflexivity*）若$\alpha \in \Gamma$，那么有$\Gamma \vdash \alpha$
- （单调性，*monotonicity*）若$\Gamma \vdash \alpha$，那么有$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$
- （传递性，*transitivity*）若$\Gamma \vdash \alpha$且$\alpha \vdash \beta$，那么$\Gamma \vdash \beta$

演绎定理（Deduction Theorem）

定理1.25（演绎定理）：

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

演绎定理（Deduction Theorem）

演绎定理的证明:

- $\Rightarrow$：对$\Gamma \cup \{\alpha\}$到β的证明长度施归纳
  - 归纳:

小结

小结

- 自然演绎
  - 树状证明，矢列
- 公理系统
  - Hilbert式证明
- 演绎定理