数理逻辑

05 - 命题逻辑的语义

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2026年 - 春季

https://daiwz.net

前情提要

前情提要

- 元语言 vs 对象语言
- 符号、语法
  - 归纳定义
- 语法的性质
  - 归纳证明
  - 括号引理
  - 唯一可读性

闭集 vs 无穷交

无穷交：“所有闭集的共同部分”

例子：用闭包生成自然数（$C^* = \bigcap\{A \mid 0 \in A, A\text{对后继运算封闭}\}$）

- 初始集: $\{0\}$
- $A \subseteq U$ 是闭的 $\iff$

$$x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$$

闭集 vs 无穷交

因为存在无穷多个闭集（考虑整数集），所以交集是该闭包最小性的体现：

- $A_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $A_{-1} = \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $A_{-2} = \{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$
- ...

语义

逻辑系统的两面

- **语法**：符号表达式的形式结构
- **语义**：符号和符号表达式的涵义（给符号以某种解释）
  - 关于“真”
  - 只与话题无关词汇相关

真值指派

定义 1.12（truth assignment）：

对于命题符号集合 S，一个真值指派 v 是一个函数

$$v : S \to \{F, T\}$$

联结词定义的布尔函数

令真值集$\mathcal{B} = \{T, F\}$,

- 联结词$\neg$被解释为一元布尔函数$B_\neg : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
- 联结词$\square$被解释为二元布尔函数$B_\square : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
  - 其中$\square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

v_1	v_2	$B_\neg(v_1)$	$B_\vee(v_1, v_2)$	$B_\wedge(v_1, v_2)$	$B_\to(v_1, v_2)$	$B_\leftrightarrow(v_1, v_2)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

命题的语义

定义1.12'（truth assignment, extended）：

1. v是一个真值指派（赋值）指它是一个函数$v : S \to \{F, T\}$，从而对于任何命题符号$\mathbf{A}_i \in S$，$v(\mathbf{A}_i)$为T或F
2. 对于任何真值指派v，定义$\bar{v} : \bar{S} \to \{F, T\}$如下
   - $\bar{v}(\mathbf{A}_i) = v(\mathbf{A}_i), i \in \mathbb{N}$
   - $\bar{v}(\neg\alpha) = B_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$
   - $\bar{v}(\alpha\Box\beta) = B_{\Box}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)), \Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

wff 的语义

$$(\mathbf{A}_2 \to (\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \to \mathbf{A}_6)$$

其中

- $v(\mathbf{A}_1) = T$
- $v(\mathbf{A}_2) = T$
- $v(\mathbf{A}_6) = F$

wff 的语义是否和可读性一样有唯一性?
换言之，$\bar{v}$ 是不是一个合法的函数?
（归纳定理*）[Enderton, 39 & 41]

Lean 4 Example {{{bsmall{[Enderton\, 27(6a)]}}}

证明：设v, w : `String` $\to$ `Bool`是两个赋值函数。如果对任意原子a都有

$$v(a) = w(a),$$

则对于任意公式ϕ，都有

$$v(\phi) = w(\phi)$$

蕴涵

$$\Gamma \vDash \alpha$$

可满足性

定义 1.13（satisfiability）：

设$\alpha \in \bar{S}$，v为S上的一个真值指派：

1. v满足α，记为$v \vDash \alpha$，指$\bar{v}(\alpha) = T$
   - α是可满足的，指存在一种真值指派v使得$v \vDash \alpha$
2. v满足一个命题公式集合$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，记为$v \vDash \Sigma$，指对任意$\alpha_i \in \Sigma$，有$v \vDash \alpha_i$
   - Σ是可满足的，指存在一种真值指派v使得$v \vDash \Sigma$

- 若$v \nvDash \alpha$，则$v \vDash \neg\alpha$
- Γ的可满足性蕴涵Γ中所有公式的可满足性，反之不一定成立

可满足性问题

- 给定一个**命题逻辑** wff α，问是否存在一个真值指派v，使得$v \vDash \alpha$?
  - 此赋值v也被称为问题的一个解（solution）
- 命题逻辑公式的可满足性问题（也称**布尔可满足性问题**）
  - 第一个被证明的NP完全问题（NP-Complete, NPC）
    - 即它是NP问题且所有NP问题可以多项式时间归约到它
  - 非确定性算法：将问题分解为猜测和验证两个部分
    - 验证一个赋值是公式的一个解很容易（多项式时间，即NP: Non-deterministic Polynomial Time）
    - 找到一个解很困难
  - 已知$P \subseteq NP$，但有没有$P = NP$? （千禧问题之一）

重言蕴涵、语义蕴涵、语义后承、逻辑推论……

定义 1.14（tautologically implies, entails）：

Σ重言蕴涵τ（记为$\Sigma \vDash \tau$）当且仅当所有满足Σ的真值指派均满足τ

1. 当$\Sigma = \emptyset$，记为$\emptyset \vDash \tau$或$\vDash \tau$
   - 意味着任意真值指派均满足τ，我们称τ为重言式或永真式（tautology）
2. 矛盾式重言蕴涵任意公式（vacuous truth），例如
   - $\{\mathbf{A}, \neg\mathbf{A}\} \vDash \mathbf{B}$
3. 逻辑等价性：若$\alpha \vDash \beta$且$\beta \vDash \alpha$，我们记为$\alpha \vDash\dashv \beta$或者$\alpha \simeq \beta$
   - 容易证明，$\simeq$是一个等价关系
   - 等价wff可以做等值替换，例如*de Morgan laws*

真值表

例：$\{\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}\} \vDash \mathbf{B}$

语义与语法间的关系

定理 1.15（语义的演绎定理，*Semantic Deduction Theorem*）：

1. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ 当且仅当 $\vDash \alpha_1 \land \alpha_2 \land \ldots \land \alpha_n \to \beta$
2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ 当且仅当 $\vDash \alpha_1 \to (\ldots(\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta))\ldots)$

1.15.2 证明概要：

1. $\Rightarrow$（反证法）：假设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ 成立时，存在 v 使得 $\bar{v}(\alpha_1 \to (\ldots(\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta))\ldots)) = F$
   - 蕴涵式赋值为假（$H_\to$）当且仅当前件为真后件为假，可得 $\bar{v}(\alpha_1) = T$ 且 $\bar{v}(\ldots(\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta))\ldots) = F \ldots$
2. $\Leftarrow$（反证法）：略

紧致性定理 [Enderton, pp.60]

紧致性定理（Compactness Theorem）：

令 Σ 是一个由 wff 构成的无穷集，且对于它的任意一个有穷子集 Σ_0，均存在一个真值指派满足所有 Σ_0 中的元素。那么，存在一个真值指派满足 Σ 中的每一个元素。

证明：

见 [Enderton, pp.60]，类似的方法在 soundness/completeness 中会再次应用。

命题逻辑的语言够用吗?

WFF 与布尔函数

- 假设α是一个至多含有命题符号$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$的wff
- 那么α就决定了一个n元布尔函数$B_\alpha^n : \{T, F\}^n \to \{T, F\}$

$v(\mathbf{A}_1), \ldots, v(\mathbf{A}_n)$	$X_1, \ldots, X_n$	$B_\alpha^n(X_1, \ldots, X_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(\mathbf{A}_1), \ldots, v_1(\mathbf{A}_n)$	$T, \ldots, T$	$B_\alpha^n(T, \ldots, T)$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$v_{2^n}(\mathbf{A}_1), \ldots, v_{2^n}(\mathbf{A}_n)$	$F, \ldots, F$	$B_\alpha^n(T, \ldots, T)$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

由 wff 实现的布尔函数 [Enderton, pp.46]

定义 1.16：

令 α 为至多包含命题符号 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ 的wff。我们定义由 α 实现（realised）的布尔函数 B_α^n（或忽略 n 记为 B_α），使得

$$B_\alpha^n(X_1, \ldots, X_n) = \bar{v}(\alpha)$$

其中 $X_i = v(\mathbf{A}_i)$。

命题逻辑的语言够用吗?

命题逻辑的语法是否足够表达所有布尔函数?

命题联词

- 我们赋予二元联词$\rightarrow$的意义就是一个二元函数：
  - $B_{\rightarrow} : \{T, F\}^2 \rightarrow \{T, F\}$
- 而赋予一元联词$\neg$的意义是一个一元函数：
  - $B_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
- 我们称这种以$\{T, F\}$（或其任意n维卡氏积）为定义域和值域的函数为布尔函数

命题联词

问题:

- 有多少种一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种n元联词?

命题联词

问题:

- 有多少种不同意义的一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种n元联词?

命题联词

问题:

- 有多少种一元布尔函数?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种n元联词?

命题联词的合成

X	Y	$B_{\neg}(X)$	$B_{\vee}(X,Y)$	$B_{\top}(X)$	$B_{\downarrow}(X,Y)$
T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F
T	F		T		F
F	F		F		T

则$B_{\top}(x) = B_{\vee}(B_{\neg}(x), x)$，而$B_{\downarrow}(x,y) = B_{\neg}(B_{\vee}(x,y))$

联词的完全组

- 一个由n个命题符号组成的wff也可以看作一个n元联结词
- **问题**：多少个 / 哪些命题联结词构成的集合就够用了？
- 也就是说，只用$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$五个联结词是否就可以实现任意n元布尔函数？

由布尔函数导出的 WFF [ENDERTON, PP.47]

定理 1.17：

对任意n元布尔函数$G : \{T, F\}^n \to \{T, F\}, n \geq 1$，都存在一个wff α使得$B^n_\alpha = G$，即使得α能够实现G。

由布尔函数导出的 WFF

例如，

X_1	X_2	X_3	$G(X_1, X_2, X_3)$
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

令

$$\begin{aligned}\alpha = &(\neg \mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) \vee \\ &(\neg \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee \\ &(\mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee \\ &(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)\end{aligned}$$

检验：$G = B_\alpha^3$

由布尔函数导出的 WFF

1.17 证明概要[Enderton, pp.47]:

分情况讨论:

1. 常函数：例如恒为真（重言式）、恒为假（矛盾式）
2. 其他函数：将映射至T的$\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$列出来，构造类似上例中的公式$G$（Disjunctive Normal Form，DNF）
   - 证明满足G的真值指派恰好令B_α^n输出T
   - 不满足G的真值指派恰好令B_α^n输出F

联词的完全组

定义 1.18：

称一组联词（布尔函数）C 是（功能）完全的（*complete*），如果任意 n 元布尔函数（$n \geq 1$）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完全的（定理 1.17 证明中已经给出）
- $\{\neg, \wedge\}$ 是完全的，因为 $B_\vee(X, Y) = B_\neg(B_\wedge(B_\neg(X), B_\neg(Y)))$

联词的完全组

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如$B_\neg$、$B_\wedge$或$B_\vee$
- 寻找，例如$B_\neg$的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备该性质
- 归纳证明这点

联词的完全组

例 [Enderton, pp.50]：

$\{\wedge, \rightarrow\}$不是一个功能完全的联词组。

证明概要：

1. 观察：若wff中只有这两个联词，且其中的命题的赋值均为T，则该公式本身的真值必然为T
   - 换言之，没有任何wff能够与$\neg\mathbf{A}$逻辑等价
2. 利用归纳法对以上观察作出证明：
   - 设α仅拥有一个命题词$\mathbf{A}$且只含$\{\wedge, \rightarrow\}$作为联词
   - 证明$\mathbf{A} \vDash \alpha$（即$B^1_\alpha(T) = T$恒成立）

小结

小结

- 语义 vs 语法
- 真值指派
- 布尔函数与 wff
- 联词的完全组