



数理逻辑

05 - 命题逻辑的语义

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2026年 - 春季

<https://daiwz.net>



前情提要



前情提要

- › 元语言 vs 对象语言
- › 符号、语法
 - › 归纳定义
- › 语法的性质
 - › 归纳证明
 - › 括号引理
 - › 唯一可读性



语义



逻辑系统的两面

- › **语法**：符号表达式的形式结构
- › **语义**：符号和符号表达式的涵义（给符号以某种解释）
 - › 关于“真”
 - › 只与话题无关词汇相关



定义 1.12 (truth assignment) :

对于命题符号集合 S , 一个真值指派 v 是一个函数

$$v : S \rightarrow \{F, T\}$$



联结词定义的布尔函数

令真值集 $\mathcal{B} = \{T, F\}$,

- › 联结词 \neg 被解释为一元布尔函数 $B_{\neg} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$
- › 联结词 \square 被解释为二元布尔函数 $B_{\square} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$
 - › 其中 $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

v_1	v_2	$B_{\neg}(v_1)$	$B_{\vee}(v_1, v_2)$	$B_{\wedge}(v_1, v_2)$	$B_{\rightarrow}(v_1, v_2)$	$B_{\leftrightarrow}(v_1, v_2)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T



定义 I.12' (truth assignment, extended) :

1. v 是一个真值指派 (赋值) 指它是一个函数 $v : S \rightarrow \{F, T\}$, 从而对于任何命题符号 $\mathbf{A}_i \in S$, $v(\mathbf{A}_i)$ 为 T 或 F
2. 对于任何真值指派 v , 定义 $\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{F, T\}$ 如下
 - » $\bar{v}(\mathbf{A}_i) = v(\mathbf{A}_i), i \in \mathbb{N}$
 - » $\bar{v}(\neg\alpha) = B_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$
 - » $\bar{v}(\alpha \square \beta) = B_{\square}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)), \square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$



$$(\mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \rightarrow \mathbf{A}_6)$$

其中

> $v(\mathbf{A}_1) = T$

> $v(\mathbf{A}_2) = T$

> $v(\mathbf{A}_6) = F$

wff 的语义是否和可读性一样有唯一性?

换言之, \bar{v} 是不是一个合法的函数?

(归纳定理*) [Enderton, 39 & 41]



LEAN 4 EXAMPLE

证明： 设 $v, w : \text{String} \rightarrow \text{Bool}$ 是两个赋值函数。如果对任意原子 a 都有

$$v(a) = w(a),$$

则对于任意公式 ϕ ，都有

$$v(\phi) = w(\phi)$$



蕴涵

$$\Gamma \vDash \alpha$$



可满足性问题

- › 给定一个命题逻辑 wff α , 问是否存在一个真值指派 v , 使得 $v \models \alpha$?
 - › 此赋值 v 也被称为问题的一个解 (solution)
- › 命题逻辑公式的可满足性问题 (也称布尔可满足性问题)
 - › 第一个被证明的NP完全问题 (NP-Complete, NPC)
 - › 即它是NP问题且所有NP问题可以多项式时间归约到它
 - › 非确定性算法: 将问题分解为猜测和验证两个部分
 - › 验证一个赋值是公式的一个解很容易 (多项式时间, 即NP: Non-deterministic Polynomial Time)
 - › 找到一个解很困难
 - › 已知 $P \subseteq NP$, 但有没有 $P = NP$? (千禧问题之一)



定义 I.14 (tautologically implies, entails) :

Σ **重言蕴涵** τ (记为 $\Sigma \models \tau$) 当且仅当所有**满足** Σ 的真值指派均**满足** τ

1. 当 $\Sigma = \emptyset$, 记为 $\emptyset \models \tau$ 或 $\models \tau$
 - » 意味着任意真值指派均满足 τ , 我们称 τ 为**重言式**或**永真式** (tautology)
2. **矛盾式重言蕴涵任意公式** (vacuous truth), 例如
 - » $\{A, \neg A\} \models B$
3. **逻辑等价性**: 若 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 我们记为 $\alpha \models \beta$ 或者 $\alpha \simeq \beta$
 - » 容易证明, \simeq 是一个**等价关系**
 - » 等价 wff 可以做等值替换, 例如 *de Morgan laws*

真值表



例: $\{A, A \rightarrow B\} \models B$



语义与语法间的关系

定理 I.15 (语义的演绎定理, *Semantic Deduction Theorem*) :

1. $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ 当且仅当 $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$
2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ 当且仅当 $\models \alpha_1 \rightarrow (\dots (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)) \dots)$

I.15.2 证明概要:

1. \Rightarrow (反证法) : 假设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ 成立时, 存在 v 使得
$$\bar{v}(\alpha_1 \rightarrow (\dots (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)) \dots)) = F$$
 - » 蕴涵式赋值为假 (H_{\rightarrow}) 当且仅当前件为真后件为假, 可得 $\bar{v}(\alpha_1) = T$ 且
$$\bar{v}(\dots (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)) \dots) = F \dots$$
2. \Leftarrow (反证法) : 略

紧致性定理 [ENDERTON, PP.60]



紧致性定理 (Compactness Theorem) :

一个 wff 集合是可满足的, 当且仅当它的所有有穷子集 (finite subset) 可满足。

证明:

见 [Enderton, pp.60], 类似的方法在 soundness/completeness 中会再次应用。



命题逻辑的语言够用吗?



WFF 与布尔函数

- › 假设 α 是一个至多含有命题符号 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ 的 wff
- › 那么 α 就决定了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{T, F\}^n \rightarrow \{T, F\}$

$v(\mathbf{A}_1), \dots, v(\mathbf{A}_n)$	X_1, \dots, X_n	$B_\alpha^n(X_1, \dots, X_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(\mathbf{A}_1), \dots, v_1(\mathbf{A}_n)$	T, \dots, T	$B_\alpha^n(T, \dots, T)$	$\bar{v}_1(\alpha)$
...
$v_{2^n}(\mathbf{A}_1), \dots, v_{2^n}(\mathbf{A}_n)$	F, \dots, F	$B_\alpha^n(T, \dots, T)$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$



由 wff 实现的布尔函数 [ENDERTON, PP.46]

定义 I.I6:

令 α 为至多包含命题符号 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ 的 wff。我们定义由 α 实现 (realised) 的布尔函数 B_α^n (或忽略 n 记为 B_α)，使得

$$B_\alpha^n(X_1, \dots, X_n) = \bar{v}(\alpha)$$

其中 $X_i = v(\mathbf{A}_i)$ 。

命题逻辑的语言够用吗？



命题逻辑的语法是否足够表达所有布尔函数？



命题联词

› 我们赋予二元联词 \rightarrow 的意义就是一个二元函数：

» $B_{\rightarrow} : \{T, F\}^2 \rightarrow \{T, F\}$

› 而赋予一元联词 \neg 的意义是一个一元函数：

» $B_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$

› 我们称这种以 $\{T, F\}$ （或其任意 n 维卡氏积）为定义域和值域的函数为布尔函数



问题:

- › 有多少种一元联词?
- › 有多少种二元联词?
- › 有多少种 n 元联词?



问题：

- › 有多少种不同意义的一元联词？
- › 有多少种二元联词？
- › 有多少种 n 元联词？



问题：

- › 有多少种一元布尔函数？
- › 有多少种二元联词？
- › 有多少种 n 元联词？

命题联词的合成



X	Y	$B_{\neg}(X)$	$B_{\vee}(X, Y)$	$B_{\top}(X)$	$B_{\downarrow}(X, Y)$
T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F
T	F		T		F
F	F		F		T

则 $B_{\top}(x) = B_{\vee}(B_{\neg}(x), x)$, 而 $B_{\downarrow}(x, y) = B_{\neg}(B_{\vee}(x, y))$



联词的完全组

- › 一个由 n 个命题符号组成的 wff 也可以看作一个 n 元联结词
- › **问题**: 多少个 / 哪些命题联结词构成的集合就够用了?
- › 也就是说, 只用 \neg 、 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 和 \leftrightarrow 五个联结词是否就可以实现任意 n 元布尔函数?

由布尔函数导出的 WFF [ENDERTON, PP.47]



定理 I.I7:

对任意 n 元布尔函数 $G : \{T, F\}^n \rightarrow \{T, F\}, n \geq 1$, 都存在一个 wff α 使得 $B_{\alpha}^n = G$, 即使得 α 能够实现 G 。



由布尔函数导出的 WFF

例如,

X_1	X_2	X_3	$G(X_1, X_2, X_3)$
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

令

$$\alpha = (\neg \mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) \vee$$
$$(\neg \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee$$
$$(\mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee$$
$$(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)$$

检验: $G = B_{\alpha}^3$



由布尔函数导出的 WFF

I.17 证明概要 [Enderton, pp.47]:

分情况讨论:

1. 常函数: 例如恒为真 (重言式)、恒为假 (矛盾式)
2. 其他函数: 将映射至 T 的 $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ 列出来, 构造类似上例中的公式 G (Disjunctive Normal Form, DNF)
 - » 证明满足 G 的真值指派恰好令 B_α^n 输出 T
 - » 不满足 G 的真值指派恰好令 B_α^n 输出 F



联词的完全组

定义 I.I8:

称一组联词（布尔函数） C 是（功能）**完全的**（*complete*），如果任意 n 元布尔函数（ $n \geq 1$ ）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

- > $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完全的（定理 I.I7 证明中已经给出）
- > $\{\neg, \wedge\}$ 是完全的，因为 $B_{\vee}(X, Y) = B_{\neg}(B_{\wedge}(B_{\neg}(X), B_{\neg}(Y)))$



如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- › 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 或 B_{\vee}
- › 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备该性质
- › 归纳证明这点



联词的完全组

例 [Enderton, pp.50]:

$\{\wedge, \rightarrow\}$ 不是一个功能完全的联词组。

证明概要:

1. 观察: 若 wff 中只有这两个联词, 且其中的命题的赋值均为 T , 则该公式本身的真值必然为 T
 - » 换言之, 没有任何 wff 能够与 $\neg A$ 逻辑等价
2. 利用归纳法对以上观察作出证明:
 - » 设 α 仅拥有一个命题词 A 且只含 $\{\wedge, \rightarrow\}$ 作为联词
 - » 证明 $A \models \alpha$ (即 $B_\alpha^1(T) = T$ 恒成立)



小结



小结

- > 语义 vs 语法
- > 真值指派
- > 布尔函数与 wff
- > 联词的完全组