



数理逻辑

03 - 形式推理

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2026年 - 春季

<https://daiwz.net>



HW-01



罗素的“他心”问题

*In his *The Problems of Philosophy*, Bertrand Russell wrote: “We have therefore to consider whether we have any reason to believe in the existence of minds other than our own. The only reason we have for believing in the existence of other minds is that their behaviour is similar to ours.” And he then said “We know that certain of our own actions are associated with certain thoughts and feelings; and observing that other people perform similar actions, we infer that they have similar thoughts and feelings.”*

这个问题的困难在于：

- › 我们直接经验到的只有自己的心灵状态（如痛、想法、情绪）
- › 对他人的心灵，我们只能看到身体行为。
- › 因此问题是：为什么我们可以合理相信别人也有心灵？



有效性的定义

定义：我们称一个推演步骤是**有效的**当且仅当**不存在任何一种可能**，令该推演的前提为真且结论为假。同样地，在这种情况下我们称这些前提**蕴涵**（entails）其结论。

显然，罗素的结论是一个基于归纳（induction）的类比（analogy）推理：

1. 行为相似 → 原因也相似
2. “他人”和“我”的行为相似
3. “我”拥有心灵，所以“他人”也拥有心灵

这在逻辑上**并非有效**，例如哲学僵尸（philosophical zombies）、完全模仿行为但没有心灵的实体（LLM?）



哲学家的论述

1. 最佳解释推理 (Inference to the Best Explanation, or Abduction)

» 若他人行为复杂且有规律，那么“他人有心灵”是对行为的最佳解释

2. 行为主义 (Behaviourism)

» 行为与原因是等价的，因此看到行为 = 看到心理状态

3. 维特根斯坦的语言实践论

» 心理概念本来就是公共语言，“他心问题”本身是一个哲学误解

设想每个人都有个盒子，盒子里装着某样东西；我们把它叫作“甲虫”。没有人能够看见别人的盒子里的东西，而每个人都说：他只是通过看自己盒子里的那只甲虫，才知道什么是“甲虫”。在这种情况下，每个人盒子里装着完全不同的东西是完全可能的。甚至可以设想盒子里的东西在不断变化。但是，假设“甲虫”这个词在这些人的语言中确实有一种用法。如果如此，它就不会被用作某个东西的名称。盒子里的那个东西在这种语言游戏中根本没有任何位置；甚至连作为“某个东西”都算不上，因为盒子里甚至可能是空的。《哲学研究》

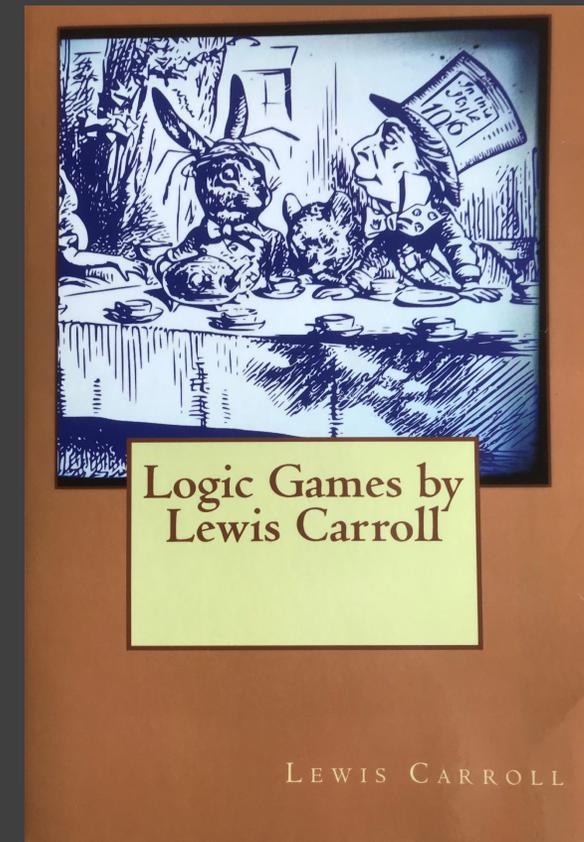


形式化：摆脱自然语言的束缚

GAMES FROM LEWIS CARROLL



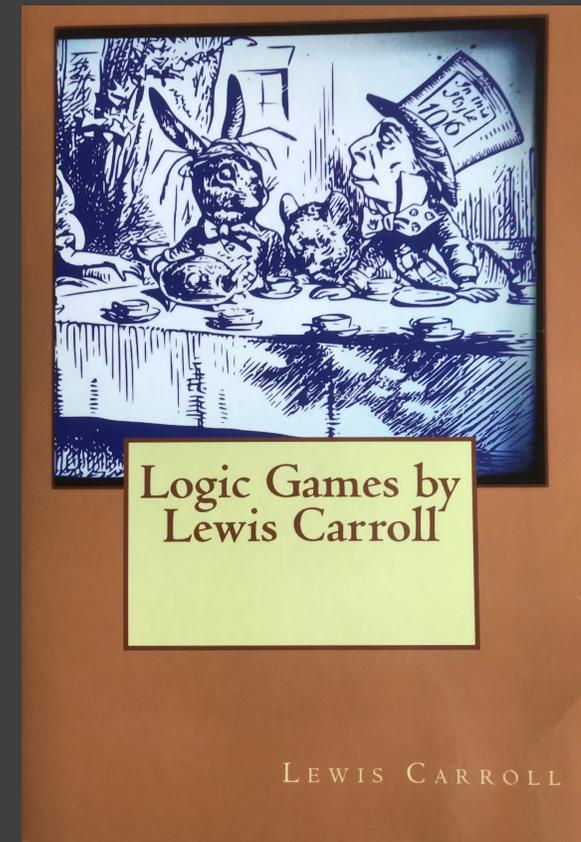
1. Babies are illogical;
2. Nobody is despised who can manage a crocodile;
3. Illogical persons are despised.
4. Q: Babies cannot manage crocodiles?



GAMES FROM LEWIS CARROLL



1. No kitten, that loves fish, is unteachable;
2. No kitten without a tail will play with a gorilla;
3. Kittens with whiskers always love fish;
4. No teachable kitten has green eyes;
5. No kittens have tails unless they have whiskers.
6. Q: Kitten with green eyes will play with a gorilla?





推理的模式 (SCHEMA)

“模式”可以用来揭示推演的结构。

例 9-1:

1. No misers (守财奴) are generous; (No X are Y)
2. Some misers are old men. (Some X are Z)
3. Some old men are ungenerous. (Some Z are not Y)

例 9-2:

1. No thieves are honest; (No X are Y)
2. Some thieves are gentlemen. (Some X are Z)
3. Some gentlemen are dishonest. (Some Z are not Y)



模式中的符号

1. All F are G

2. n is F

3. So: n is G

1. All men are motal

2. Tweety is a robin

3. So: Donalt Trump is femail

相同的代号只能替换为相同的名字



模式中的符号

1. All F are G

2. n is F

3. So: n is G

1. All men are men

2. Socrates is a man

3. So: Socrates is a man

不同的代号可以替换为相同的名字



模式中的符号

1. All F are G

2. n is F

3. So: n is G

1. Socrates is a man

2. All men are mortal

3. So: Socrates is mortal

前提的顺序不影响推演有效性



模式中的符号

比如：

1. All F are G
2. n is F
3. So: n is G

又比如：

1. All H are K
2. m is H
3. So: m is K

比如：

1. All Φ are Ψ
2. α is Φ
3. So: α is Ψ

又比如：

1. All ① are ②
2. $*$ is ①
3. So: $*$ is ②

(有些) 符号本身并无意义



模式的抽象

“All men are mortal, Socrates is a man, So: Socrates is mortal”.

1. $A, B, \text{So: } C$
2. All F are G, m is $H, \text{So: } n$ is K
3. All F are G, n is $F, \text{So: } n$ is G
4. All F are $G, \text{Socrates is } F, \text{So: Socrates is } G$
5. All F are mortal, n is $F, \text{So: } n$ is mortal
6. All men are $G, \text{Socrates is a man, So: Socrates is } G$
7. All men are mortal, Socrates is a man, So: Socrates is mortal

存在一些可靠的抽象推理形式（form），它的任意一个实例（instance）都是**有效的**，因此这些模式本身也是**有效的**。



逻辑有效性



话题无关性 (TOPIC-NEUTRALITY)

意下这些推演是有效的吗?

例 IO-1:

1. Jill is a mother
2. So: Jill is a parent

例 IO-2:

1. Jack has a first cousin
2. So: At least one of Jack's parents is not an only child

例 IO-2:

1. Jack is a bachelor
2. So: Jack is unmarried

例 IO-1':

1. n is a mother
2. So: Jill is a parent

例 IO-2':

1. n has a first cousin
2. So: At least one of n 's parents is not an only child

例 IO-2':

1. n is a bachelor
2. So: n is unmarried



话题无关性 (TOPIC-NEUTRALITY)

与具体论题无关，但对命题论述起作用的词汇，例如“所有”（all）、“一些”（some）、“与/和”（and）、“或”（or）、“并非”（not）、“如果”（if）、“那么”（then）、“是”（is, are）等，可被称为**话题无关词汇**（*topic-neutral vocabulary*）。

尽管仍然存在一些必须依靠话题相关词汇才能判定有效性的论题，
这门课中我们将不再讨论它们。



逻辑有效性 (LOGICAL VALIDITY)

至此，我们能够更明确地谈论“逻辑”上的有效性

逻辑的目的是**系统性地检验论证的有效性**

逻辑有效性 (logical validity) :

我们称一个推演步骤是**逻辑有效的**，当且仅当它的有效性仅由其前提与结论中的话题无关词汇决定。对于一个逻辑有效的演绎，我们称其前提**逻辑上蕴涵** (logically entails) 其结论。



形式化推理 (FORMAL REASONING)

形式上的“真”是由推理的形式决定的，与论题的领域无关。

例 II:

1. Whatever is *green* is *coloured*
2. Whatever is *green* and square is *green*



逻辑谈论的只是关于真的一些的规律

形式逻辑 (FORMAL LOGIC)



Pure Logical Schema = Schematic Variables + Topic-Neutral Vocabulary

数理逻辑谈论的只是关于真的一些**普遍性**规律



“话题无关词汇”的边界？

我们似乎定义了一个“话题无关词汇”表，但是它是否足够准确？除了这些“与”、“或”、“非”等等，还有没有必要添加其他词汇？

例 I2:

1. 数理逻辑比数学分析简单
2. 数学分析比代数几何简单
3. So: 数理逻辑比代数几何简单

例 I2':

1. m is easier than n
2. n is easier than o
3. So: m is easier than o

例 I2-2:

1. m is F -er than n
2. n is F -er than o
3. So: m is F -er than o



“话题无关词汇”的边界？

1. 我们无法绝对地定义“话题无关词”的边界，许多事情的描述本身就是模糊的
2. 本课程只考虑“任意”、“某些”、“与”、“或”、“非”等**有限个、语义明确**的话题无关词汇
 - » 它们组成了数理逻辑的核心部分
 - » 一定情况下，由它们构成的语句将具有**绝对明确的**（absolutely clear）逻辑有效性



形式化的后果

例 13: Jack is married. Jack is not married. So: the world will end tomorrow!

- › 逻辑上有效吗? 为什么会这样?
- › 它的有效性来自于哪些词汇?
- › 解决办法: 在有效性的定义中加入“命题间的相关性” (relevance)
- › 但“逻辑有效”的定义将不复存在
- › A small price to pay: *vacuous truth*

语义上的“真”vs“逻辑上有效”



我们无法一劳永逸地把握真

塔斯基 (TARSKI)



- › 我们只能谈论特定领域的**真** $\text{Th}\mathcal{U} = \{\sigma \mid \mathcal{U} \models \sigma\}$
- › $\text{Th}\mathcal{U}$ 不是 \mathcal{U} 中可定义的 (Why?)
- › 日常语言中的**真**是不可定义的 (Why???)



关于真，逻辑到底能谈论多少？

逻辑学是否提供新知识?



- › 培根 (Francis Bacon) : 亚里士多德《工具论》中的那些纯演绎的方法 (三段论) 不足以发现科学真理, 因此需要《新工具》 (*Novum Organum Scientiarum*)
- › 康德 (Immanuel Kant) : 分析命题 (主项包含谓项) 不提供新知识, 后天综合命题讲述经验世界的知识, 而哲学、数学知识应该是先天综合命题。

逻辑学是否提供新知识?



我也相信，所有人都先天具备逻辑思考的能力
那我们又能从这门课学到什么？

希望经过本学期的学习可以回答的问题



$\{\sigma \mid \forall \mathcal{U} (\mathcal{U} \models \sigma)\}$ 是个怎样的集合?

希尔伯特1930年的格尼斯堡演讲



有这样一种工具，它能够将理论与实践，将思想与观察联系起来、那就是数学；它搭建了连接的桥梁并使之愈加坚固。以至于，我们整个当代文化，就其依赖于我们对自然的理智洞察与利用的范围内而言，是以数学为基础的。

希尔伯特1930年的格尼斯堡演讲



伽利略早就说过：只有习得了自然对我们诉说时所使用的语言和符号，一个人才能理解自然；而这个语言正是数学，它的符号则是数学图形。

康德宣称：“我始终认为，存在于每个特定的自然科学中的真理不会比数学中的真理更多。”

希尔伯特1930年的格尼斯堡演讲



事实上，只有当我们提炼出一门自然科学的数学内核并将其彻底揭开时，我们才算掌握了它的理论。

没有数学，今天的天文学和物理学将是不可能的；在它们的理论部分，这些科学直接展开为数学。正如大量其他的应用一样，这些事实使数学享有在公众中无与伦比的权威。

希尔伯特1930年的格尼斯堡演讲



尽管如此，所有数学家都拒绝将应用作为数学价值的标准。高斯在说到是什么让数论成为这位数学第一人最喜爱的学科时，提到的是它那魔法般的吸引力而不是它目前为止超越所有其他数学分支的那无穷无尽的丰富性。

克罗内克将数论学家比作食莲族[†]，一旦尝到了甜头便再也无法离开它了。

[†]出自荷马史诗《奥德赛》。古希腊神话中传说北非的某个岛上种有许多称为lotus的树，当地人以此树的果实“lotos”为食。这种果实具有强烈的催眠作用，吃了后能忘却烦恼忧愁，陷入昏昏噩噩、乐不思蜀的状态。

希尔伯特1930年的格尼斯堡演讲



伟大的数学家庞加莱曾以令人震惊的犀利抨击了托尔斯泰，后者声称“以科学的名义追求科学”是愚蠢的。例如，若只有那些实用主义头脑存在而没有那些无私的傻瓜来推动进步的话，工业上的成就是永远没有可能的。

正如格尼斯堡的数学家雅可比所说，人类精神的荣耀才是所有科学唯一的目标。

希尔伯特1930年的格尼斯堡演讲



我们绝不相信那些今天还以哲学的姿态或以优越的口吻所做的关于文化衰落的预言并接受不可知。对我们来说，不可知是不存在的，并且在我看来，在自然科学中也不存在。

让我们抛弃那个愚蠢的不可知，代之以下面的口号：

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.