



数理逻辑

02 - 有效性与真

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2026年 - 春季

<https://daiwz.net>



前情提要



逻辑的作用是系统性地检验论证的有效性

1. 什么叫“论证”（arguments）？
2. 什么叫“检验”（evaluation）？
3. 什么叫“有效性”（validity）？
4. 什么叫“系统性地”（systematically）？



论证

论证：“辩” - “ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ” - “ARGUMENT”



《现代汉语词典（第七版）》：

1. 在逻辑学中，指引用论据来证明论题的真实性的论述过程，是由论据推出论题时所使用的推理形式。
2. 论述并证明。
3. 立论的根据。

“论证”vs“解决问题”



The General Problem Solver [Herbert A. Simon, J. C. Shaw and Allen Newell, 1957]

从“证明 $1 + 1 = 2$ ”，“玩吃豆人”到“烧一壶开水”

“解决问题”



BIG Problem

“解决问题”



Working Memory \rightarrow [small problem 1, small problem 2, ...]

“解决问题”



Working Memory \rightarrow [**small problem #1**, small problem #2, ...]

“解决问题”



Working Memory \rightarrow [[smaller problem #1.1, smaller problem #1.2],
small problem #2, ...]

“解决问题”



Working Memory \rightarrow [~~smaller problem #1.1~~, smaller problem #1.2],
small problem #2, ...]

“解决问题”



Working Memory \rightarrow [~~smaller problem #1.1~~, ~~smaller problem #1.2~~],
small problem #2, ...]

“解决问题”



Working Memory \rightarrow [~~small problem #1~~, **small problem #2**, ...]

“已证”? “解决”?



如何判定 ~~small problem~~ #1?

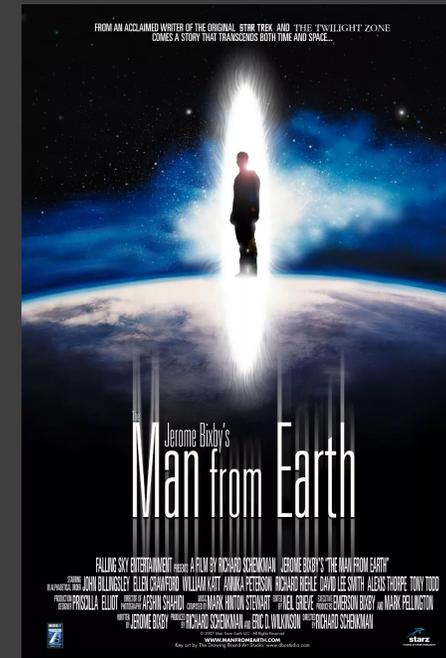


检验

例 I



- › 论点 1: 约翰已经活了超过14,000年。
- › 论点 2: 永生并不像看起来那么不可能。
- › 论点 3: 他见证了人类文化和宗教的诞生。
- › 论点 4: 约翰长久的生命解释了他对历史的深刻理解。
- › 论点 5: 永生的神话解释了许多历史人物为何显得“超凡脱俗”。
- › 结论: 永生者可能是我们许多神话和宗教信仰的源头。





检验论证的两个维度

- › 论点 1: 约翰已经活了超过14,000年。
- › 论点 2: 永生并不像看起来那么不可能。
- › 论点 3: 他见证了人类文化和宗教的诞生。
- › 论点 4: 约翰长久的生命解释了他对历史的深刻理解。
- › 论点 5: 永生的神话解释了许多历史人物为何显得“超凡脱俗”。
- › 结论: 永生者可能是我们许多神话和宗教信仰的源头。

1. 论证的前提是否正确?
2. 论证的过程是否滴水不漏?
 - › 即: 若前提100%正确, 结论是否保证100%正确?
 - › “滴水不漏”的确是另一个维度, 因为它与“前提是否正确”无关



检验论证的两个维度

在这门课上，我们只关注第二个维度：

1. “前提”来自各个领域，其正确性和“逻辑”本身无关
2. 逻辑学家关心的是：“从某些（假定为真的）论据出发，究竟能不能得到最终的结论”



论证的有效性

例 2



1. 小明不是在卷，就是在卷的路上
2. 小明不在卷
3. 小明在卷的路上

例3



1. 卡普空的《怪物猎人》系列一直都很好玩。
2. 卡普空出了一款正统续作《怪物猎人：荒野》！
3. 《怪物猎人：荒野》一定很好玩！



两种推理的不同

- › 例1 & 2 中的推理“滴水不漏”——演绎（deduction）
 - › 若它们的论据为真，没有任何理由能让它们的结论为假
 - › 从推理得到的结果
- › 例3 中的推理虽然很可能，但存在“漏洞”——归纳（induction）
 - › 若3.1和3.2为真，确实能找到令3.3为假的理由（即便可能性很小）
 - › 从过去经验中得到的结论，它能够一定程度上预测未来



演绎有效性（非正式定义）

定义：若一个从某些前提推演出结论的演绎步骤完全“滴水不漏”，即若前提的成立绝对保证（absolutely guarantees）结论的成立，我们就称这一步推理是**演绎有效的**（deductively valid）。

定义：反过来，若一个包含前提和结论演绎步骤是**有效的**（valid），那么我们称这些前提（premises）**演绎蕴涵**（deductively entails）它的结论（conclusion）。

- › 例₁ & 2 是演绎有效的
- › 例₃ 尽管是很有说服力的归纳，但它不是演绎有效的



演绎有效性（非正式定义）

逻辑推理能够系统性地检验论证的有效性

定义：若一个从某些前提推演出结论的演绎步骤完全“滴水不漏”，即若前提的成立绝对保证（absolutely guarantees）结论的成立，我们就称这一步推理是演绎有效的（deductively valid）。

“绝对保证”和“滴水不漏”过于抽象，
有没有更具体、更数学的定义？



从有效性 (validity) 到可靠性 (soundness)



“有效性”的另一种非正式定义

定义：我们称一个推演步骤是**有效的**当且仅当**不存在任何一种可能**，令该推演的前提为真且结论为假。同样地，在这种情况下我们称这些前提**蕴涵**（entails）其结论。

例 4：

1. 某人从来没学过数理逻辑，一整个学期不来上课，也不读相关的书，完全不接触任何关于数理逻辑的知识
2. TA 非常有骨气，不但不交作业，考试也拒绝作弊
3. TA 期末会挂科

问：以上推理是**有效的**吗？



用量化的“可能性”来描述“有效性”

考虑所有的可能性：理论上可能、技术上可能、操作上可能、经济上可能、XXX上可能.....

- › “一切平行世界构成的集合”： $\{universe \in \mathcal{U}\}$
- › 它们的概率分布： $\sum_{u \in \mathcal{U}} P(u) = 1$

至此，我们可以更**数学地**描述“演绎有效性”：即在最不可能最不可能最不可能.....（省略无穷次）出现的平行世界里，当推演的前提为真时，其结论也不可能为假。甚至可以说，前提为真且结论为假的情况是在**根本上不自洽**的。

- › 换句话说，一个有效的推演，其结论一定是前提的**必要条件**
 - › Valid inferences are *necessarily truth-preserving* (“necessary” means “not-possible-not”)
- › 自此，我们将省略对“可能性”的描述，它一定是指**最弱**的“可能”。
- › 而这里的“必要性”与“最弱的可能性”相反，是**最强**的“必要性”，即无论任何条件下都必须满足的性质。



一致性 (CONSISTENCY)

有了对“可能性”的量化，我们得以继续定义与“有效性”相关的逻辑学概念。

一个或多个命题是**不一致的** (inconsistent)，当且仅当在任意可能的情况下，它们都**无法**同时为真。

› 也就是说，一组命题是**一致的**，只需要存在一种可能情况令它们同时为真。

一个推演是有效的，当且仅当它的**前提和其结论的否定是不一致的**。



下面的命题是一致的吗？

- › 命题 1: Spot is a dog
- › 命题 2: Spot cannot fly
- › 命题 3: All dogs cannot fly

credit: r/explainlikeimfive



等价性 (EQUIVALENCE)

有了对“可能性”的量化，我们得以继续定义与“有效性”相关的逻辑学概念。

两个命题是等价的 (equivalent)，当且仅当它们在完全相同的可能情况下才同时为真。

命题 A 和命题 B 是等价的，当且仅当 A 蕴涵 (entails) B ，且 B 蕴涵 A 。

有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)

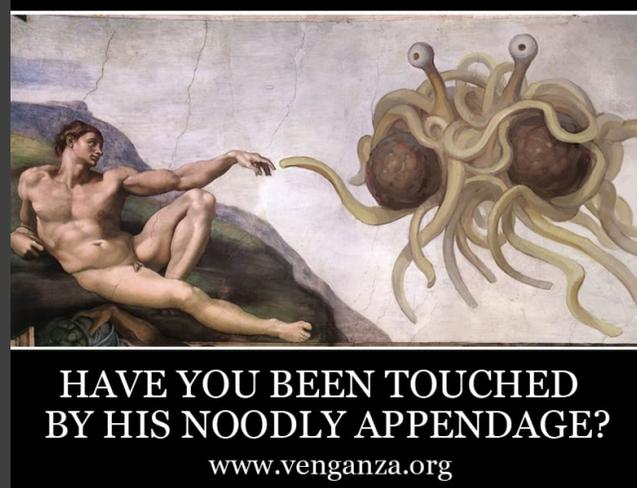


下面的推理是演绎有效的吗？

- › 前提 1: Spot is a dog
- › 前提 2: All dogs can fly
- › 结论: Spot can fly.

credit: r/explainlikeimfive

有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)

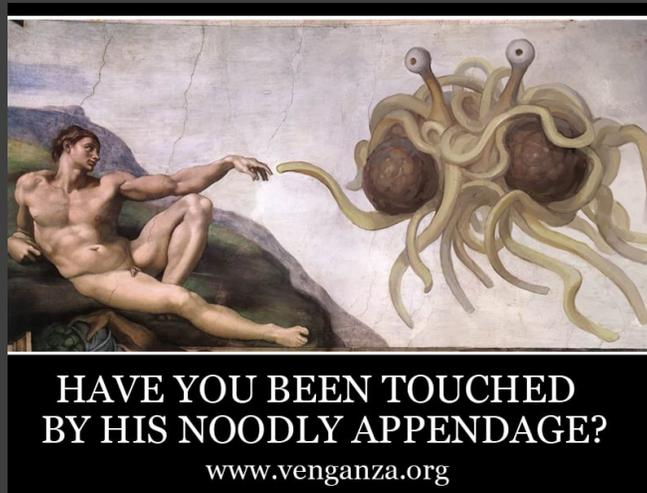


例 5-I:

1. 特朗普说的所有话都是真的
2. 特朗普说飞面神 (Flying Spaghetti Monster) 是存在的
3. 飞面神真的存在



有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)



例 5-2:

1. 飞面神的存在是一个玩笑
2. 玩笑很可能是真的
3. 飞面神真的存在



有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)

例6:

1. 好球员做不了好教练
2. 李铁是个好球员
3. 李铁不是个好教练

例7:

1. All lions are fierce
2. Some lions do not drink coffee
3. Some fierce creatures do not drink coffee



有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)

“有效”推演的三种赋值方式：

1. 前提为真，结论为真（例7）
2. 前提为假，结论为假（例5-I）
3. 前提为假，结论为真（例6）

- › 根据我们对“有效性”的定义，唯一被其排除的是“前提为真，但结论为假”的情况
- › Again, valid inferences are *necessarily truth-preserving*

非有效准则 (The Invalidity Principle)：若一个推演的前提为真，但结论为假，那么这个推演一定是非有效的 (must be invalid)。



有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)

那么，非有效的推演能有如何的赋值呢？

例 8:

1. 天气一点也不好
2. 我抓到了超梦
3. 我的作业没做完

1. $\text{true} \rightarrow \text{false}$ 一定是非有效推演
2. 非有效推演不一定是 $\text{true} \rightarrow \text{false}$

有效、非有效 (INVALIDITY) 与真 (TRUTH)



语言中的“有效”无法帮助我们寻找“真”，我们需要其他东西



有效性与可靠性 (SOUNDNESS)

一个论证 (argument) 是有效的 (valid) ，当且仅当从它的前提到结论的推演是有效的。

一个论证 (argument) 是**可靠的** (sound) ，当且仅当从它的前提为真，且结论为真。换言之，有效论的证前提为真，且论证本身也是有效的。

ONCE AGAIN, ELI5 的例子



下面的推理是可靠的吗？

- › 前提 1: ~~Spot is a dog~~ All dogs have the same flying ability as Spot the dog
- › 前提 2: Spot cannot fly in real world
- › 结论: All dogs cannot fly in real world

credit: r/explainlikeimfive



ONCE AGAIN, ELI₅ 的例子

Laika, a Moscow street dog, became the first creature to orbit Earth (with USSR's Sputnik 2), but she died in space.



ONCE AGAIN, ELI₅ 的例子



自然语言是有漏洞的！
我们无法用有穷的语言，准确地描述 ω ！



6.54 我的命题可以用以下方式解释：了解我作法的人，会用这些命题当做**梯子**，越过它们，最终会发现这些**梯子是荒谬的**（也可以说，当他们爬上去之后，要把梯子丢掉）

——“他必须超越这些命题，之后才能正确地看待世界”



小结



逻辑的作用是系统性地检验论证的有效性

1. 什么叫“论证”（arguments）？
2. 什么叫“检验”（evaluation）？
3. 什么叫“有效性”（validity）？
4. 什么叫“系统性地”（systematically）？