数理逻辑（2025 春）作业 - 08

1 [Enderton, 第 130 页, 第 (4,7,10) 题] 演绎证明:

1. $\vdash \forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi$;
2. $\vdash \exists x(Px \to \forall x\, Px)$;
3. $\{Qx, \forall y(Qy \to \forall z\, Pz)\} \vdash \forall x\, Px$;
4. $\forall x \forall y\, Pxy \vdash \forall y \forall x\, Pyx$。

2 证明题

1. 给出**约束变元替换定理**的完整证明。定理如下：
   - 令 φ 为一个 WFF，t 为一个项，x 为一个变元。总可以找到一个 WFF φ'，它和 φ 的差别仅在于约束变元，使得
     (a) $\varphi \vdash\dashv \varphi'$;
     (b) t 和可以在 φ' 中无冲突地替换 x。

2.[Enderton, 第 131 页, 第 15 题] 证明**规则 EI**：假设常量符号 c 不出现在 φ, ψ 或 Γ 中，且有 $\Gamma; \varphi^x_c \vdash \psi$。则有 $\Gamma; \exists x\, \varphi \vdash \psi$，并且存在一个从 $\Gamma; \exists x\, \varphi$ 推导出 ψ 的演绎，该演绎中 c 未出现。（“EI”代表“存在实例化”）。然后用该规则证明如下公式从 $\emptyset$ 可推导：

1. $\exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$;
2. $\forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$。