数理逻辑（2025 春）作业 - 06

1 证明题（Hao et. al., pp. 55）

一个常见的命题逻辑公理系统是 Łukasiewicz 的 L_3，它拥有 3 条公理：

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

其推理规则仍然只有一条，即 MP 规则。该公理系统的语言使用了 $\to$ 与 $\neg$ 两种连词。事实上，还存在只有一种连词的命题逻辑公理系统。

我们令 $\mathcal{L}_1$ 为只包含 $\to$ 连词的命题逻辑语言，并将 L_3 中的公理 3 替换为 Pierce's Law 后我们可以得到 Tarski-Bernays 系统 $\mathscr{L}_1$：

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

MP 规则仍然是它唯一的推理规则。请证明：

- 语言 $\mathcal{L}_1$ 是功能非完备的（functionally incomplete），即它的语言无法表达所有布尔函数；
- 系统 $\mathscr{L}_1$ 是语法完备的（syntactically complete），即用 $\mathcal{L}_1$ 能表达的重言式均可用 $\mathscr{L}_1$ 证明。我们用 $\vdash_1 \alpha$ 表示 α 是系统 $\mathscr{L}_1$ 中的一个定理。那么请证明：若 $\mathcal{L}_1$ 中的公式 α 是重言式，则 $\vdash_1 \alpha$。
  - 【提示：可以重新定义“极大一致集”的概念（目前的定义中有“$\neg$”因此不适用于 $\mathcal{L}_1$ 语言），并且模仿课上关于完备性定理的证明。更进一步，称一个公式集 Γ 为 α-极大的，如果 $\Gamma \nvdash_1 \alpha$，并且对所有的 $\beta \notin \Gamma$，$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_1 \alpha$。可以先证明每一个 α-极大的公式集都是“极大一致”的】