

数理逻辑（2025 春）作业 - 04

I Lean 4 编程题

I.1 合取对析取的分配律

证明：对于任意原子赋值 v_{atoms} 以及公式 ϕ 、 ψ 、 χ ，有

$$v_{\text{atoms}} (\text{p_and } \phi (\text{p_or } \psi \chi)) = v_{\text{atoms}} (\text{p_or } (\text{p_and } \phi \psi) (\text{p_and } \phi \chi)).$$

这对应于布尔恒等式

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

I.2 iff 与蕴涵合取的等价性

证明：对于任意原子赋值 v 和公式 ϕ, ψ ，有

$$v_{\text{atoms}} (\text{p_iff } \phi \psi) = v_{\text{atoms}} (\text{p_and } (\text{p_imp } \phi \psi) (\text{p_imp } \psi \phi)).$$

I.3 Vacuous Truth

证明：对于任意原子赋值 v 和公式 ϕ, ψ ，若

$$v_{\text{atoms}} \phi = \text{false},$$

则必有

$$v_{\text{atoms}} (\text{p_imp } \phi \psi) = \text{true}.$$

I.4 WFF 中原子提取与语义保持

1. 定义一个函数

```
def atoms : WFF → Finset String
```

用来提取公式 ϕ 中出现的所有原子集合。

2. 证明：若对于两个原子赋值 $v_1, v_2 : \text{String} \rightarrow \text{Bool}$ 满足

$$\forall s \in \text{atoms } \phi, \quad v_1(s) = v_2(s),$$

则有

$$v_{v_1} \phi = v_{v_2} \phi.$$

提示：先递归定义 `atoms`，然后对 ϕ 进行结构归纳证明。