



数理逻辑

02 - 一阶逻辑

(Press **?** for help, **n** and **p** for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2025年 - 春季

<https://daiwz.net>





语法





什么是一阶（**first-order**）？





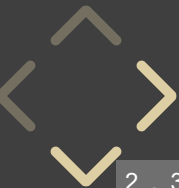
一阶语言

逻辑符号

1. 标点符号: “(”, “)”, “,”
2. 联结词: $\rightarrow, \neg$
 - » 其它联结词: $\wedge, \vee, \leftrightarrow$
3. 变元 (可数无穷个): $v_0, v_1, \dots$
4. 量词: $\forall$
 - » 其它量词: $\exists$
5. 等词 (可选): $=$

非逻辑符号 (signature)

1. n 元谓词 (可数无穷个), $n \geq 1$:
 $A_0^n, A_1^n, \dots$
2. 常元 (可数无穷个): $c_0, c_1, \dots$
 - » 特殊常元: $\top, \perp, T, F$
3. n 元函数 (可数无穷个):
 $f_0^n, f_1^n, \dots$





一阶语言的例子

纯一阶逻辑 (*pure First-Order Logic, FOL*)

常元	$c_0, c_1, \dots$
n 元谓词	$A_0^n, A_1^n, \dots$
n 元函数	$f_0^n, f_1^n, \dots$
等词	无





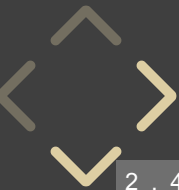
一阶语言的例子

纯一阶逻辑 (*pure First-Order Logic, FOL*)

常元	$c_0, c_1, \dots$
n 元谓词	$A_0^n, A_1^n, \dots$
n 元函数	$f_0^n, f_1^n, \dots$
等词	无

集合论

常元	$\emptyset$
2元谓词	$\in$
n 元函数	无
等词	有





一阶语言的例子

初等数论

常元	0
谓词	$<$
1元函数	S
2元函数	$+, \times, \mathbf{E}$
等词	有

› 注: **S**, **E**分别为后继和指数函数





一阶语言的例子

初等数论

常元	0
谓词	$<$
1元函数	S
2元函数	$+, \times, \mathbf{E}$
等词	有

› 注: **S**, **E**分别为后继和指数函数

上面的例子里, 我们只是按照习惯来定义各个 language signature 中谓词与函数的**记号**, 例如 $<, \in, \leq$ 只是 A_0^2 ; **0**, $\emptyset$ 为 c_0 ; $+, \times, \mathbf{E}$ 为 f_0^2, f_1^2, f_3^2





FOL之于数学

因为：

- › 一阶语言包含集合论语言
- › 一切数学都可被嵌入在集合论中

所以：

1. 集合论的**一阶语言**能够描述任意数学
2. 一切数学定理都来自对集合论公理的**逻辑推导**





FOL之于数学

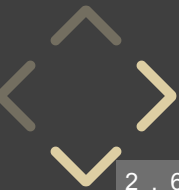
因为：

- › 一阶语言包含集合论语言
- › 一切数学都可被嵌入在集合论中

所以：

1. 集合论的**一阶语言**能够描述任意数学
2. 一切数学定理都来自对集合论公理的**逻辑推导**

一阶逻辑语言足以描述一切数学结构吗？



FOL 的例子 [ENDERTON, PP.73]





FOL 的例子 [ENDERTON, PP.73]

I. “所有苹果都坏了”

$$\forall v_1(A(v_1) \rightarrow B(v_1))$$





FOL 的例子 [ENDERTON, PP.73]

1. “所有苹果都坏了”

$$\forall v_1 (A(v_1) \rightarrow B(v_1))$$

2. “有些苹果坏了”

$$\exists v_1 (A(v_1) \wedge B(v_1))$$

$$\neg \forall v_1 (\neg (\neg (A(v_1) \rightarrow (\neg B(v_1))))))$$





FOL的例子 [ENDERTON, PP.73]

1. “所有苹果都坏了”

$$\forall v_1(A(v_1) \rightarrow B(v_1))$$

2. “有些苹果坏了”

$$\exists v_1(A(v_1) \wedge B(v_1))$$

$$\neg \forall v_1(\neg(\neg(A(v_1) \rightarrow (\neg B(v_1))))))$$

3. 所有 X 都属于 Y

$$\gg \quad \forall v_1(X(v_1) \rightarrow Y(v_2))$$

$$\gg \quad \forall v_1(X(v_1) \wedge Y(v_2)) \text{ (语气太强: 所有东西都是 } X \text{ 而且也是 } Y \text{)}$$





FOL的例子 [ENDERTON, PP.73]

1. “所有苹果都坏了”

$$\forall v_1(A(v_1) \rightarrow B(v_1))$$

2. “有些苹果坏了”

$$\exists v_1(A(v_1) \wedge B(v_1))$$

$$\neg \forall v_1(\neg(\neg(A(v_1) \rightarrow (\neg B(v_1))))))$$

3. 所有 X 都属于 Y

$$\gg \forall v_1(X(v_1) \rightarrow Y(v_2))$$

$$\gg \forall v_1(X(v_1) \wedge Y(v_2)) \text{ (语气太强: 所有东西都是 } X \text{ 而且也是 } Y \text{)}$$

4. 存在 X 属于 Y

$$\gg \exists v_1(X(v_1) \wedge Y(v_1))$$

$$\gg \exists v_1(X(v_1) \rightarrow Y(v_1)) \text{ (语气太弱: 存在一些东西, 只有当它是 } X \text{ 时, 它才是 } Y \text{)}$$



定义 2.1 (项, *term*) [Enderton, pp.74]:

每个 n 元函数符号 f 对应一个 n 元项构造算子 $\mathcal{F}_f$:

$$\mathcal{F}_f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = f\epsilon_1 \cdots \epsilon_n$$

一阶逻辑的项的集合是常元和变元符号经过 (0 次或多次) $\mathcal{F}_f$ 运算得到的表达式集合



定义 2.1 (项, *term*) [Enderton, pp.74]:

每个 n 元函数符号 f 对应一个 n 元项构造算子 $\mathcal{F}_f$:

$$\mathcal{F}_f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = f\epsilon_1 \cdots \epsilon_n$$

一阶逻辑的项的集合是常元和变元符号经过 (0 次或多次) $\mathcal{F}_f$ 运算得到的表达式集合

例如:

$$\begin{aligned} &+ v_2 S 0, \\ &S S S S 0, \\ &+ E v_1 S S 0 E v_2 S S 0. \end{aligned}$$





定义 2.2 (原子公式, *atomic formula*, *atom*) [Enderton, pp.74]:

一阶逻辑的原子公式是如下形式的表达式

$$Pt_1 \cdots t_n$$

其中 P 是 n 元谓词, $t_1, \dots, t_n$ 是项





原子公式

定义 2.2 (原子公式, *atomic formula*, *atom*) [Enderton, pp.74]:

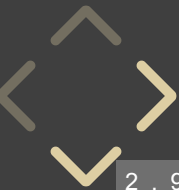
一阶逻辑的原子公式是如下形式的表达式

$$Pt_1 \cdots t_n$$

其中 P 是 n 元谓词, $t_1, \dots, t_n$ 是项

例如:

$$\begin{aligned} &= v_1 v_2, \\ &< SS0 SSSS0, \\ &= Ev_1 SS0 Ev_2 SS0. \end{aligned}$$





合式公式

定义 2.3 (合式公式, *well-formed formula*, wff) [Enderton, pp.75]:

一阶逻辑的合式公式集合是原子公式通过运用0次或多次公式构造算子 $\mathcal{E}_{\neg}, \mathcal{E}_{\leftarrow}, Q_i (i = 1, 2, \dots)$ 形成的表达式集合。其中

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\neg}(\gamma) &= (\neg\gamma) \\ \mathcal{E}_{\leftarrow}(\gamma, \delta) &= (\gamma \leftarrow \delta) \\ Q_i(\gamma) &= \forall \mathbf{v}_i \gamma\end{aligned}$$





合式公式

定义 2.3 (合式公式, *well-formed formula*, wff) [Enderton, pp.75]:

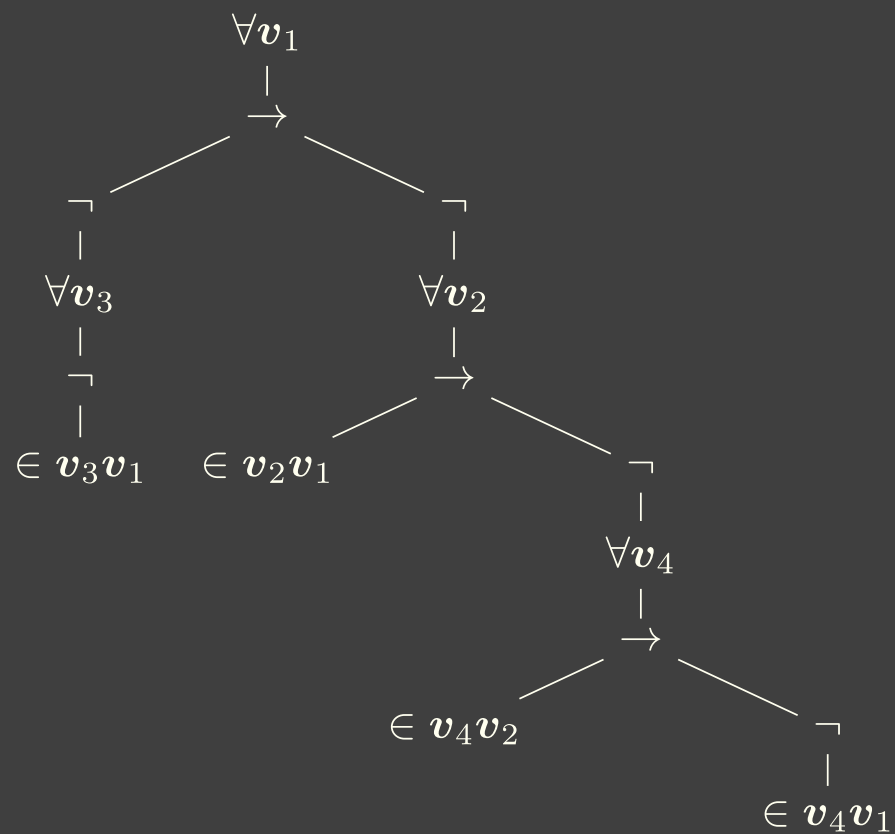
一阶逻辑的合式公式集合是原子公式通过运用0次或多次公式构造算子 $\mathcal{E}_{\neg}, \mathcal{E}_{\leftarrow}, Q_i (i = 1, 2, \dots)$ 形成的表达式集合。其中

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\neg}(\gamma) &= (\neg\gamma) \\ \mathcal{E}_{\leftarrow}(\gamma, \delta) &= (\gamma \leftarrow \delta) \\ Q_i(\gamma) &= \forall v_i \gamma\end{aligned}$$

例如:

- > $\neg v_i$ 不是 wff
- > $\forall v_1((\neg \forall v_3(\neg \in v_3 v_1)) \rightarrow (\neg \forall v_2(\in v_2 v_1 \rightarrow (\neg \forall v_4(\in v_4 v_2 \rightarrow (\neg \in v_4 v_1))))))$ 是 wff (ZFC 的正则公理)

$$\forall v_1((\neg \forall v_3(\neg \in v_3 v_1)) \rightarrow (\neg \forall v_2(\in v_2 v_1 \rightarrow (\neg \forall v_4(\in v_4 v_2 \rightarrow (\neg \in v_4 v_1))))))$$





$$> \forall v_2 \in v_2 v_1$$

$$> (\neg \forall v_1 (\neg \forall v_2 \in v_2 v_1))$$





$$> \forall v_2 \in v_2 v_1$$

$$> (\neg \forall v_1 (\neg \forall v_2 \in v_2 v_1))$$

» “存在一个集合，任意集合都是它的元素”

» 记 $\exists x \alpha \equiv \neg \forall x (\neg \alpha)$



- > $\forall v_2 \in v_2 v_1$
 - » “所有集合都是_____₁的元素”
- > $(\neg \forall v_1 (\neg \forall v_2 \in v_2 v_1))$
 - » “存在一个集合，任意集合都是它的元素”
 - » 记 $\exists x \alpha \equiv \neg \forall x (\neg \alpha)$



$$\varphi \equiv \sum_{j=0}^k a_j$$





自由变元

定义 2.4 (自由出现, *occur free*) [Enderton, pp.76]:

考虑一个变元 x , 我们递归地定义:

1. 对于原子公式 α , x 在 α 中自由出现当且仅当 x 在 α 中出现
2. x 在 $(\neg\alpha)$ 中自由出现当且仅当 x 在 α 中自由出现
3. x 在 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 中自由出现当且仅当 x 在 α 中自由出现或在 β 中自由出现
4. x 在 $(\forall v_i \alpha)$ 中自由出现当且仅当 x 在 α 中出现且 $x \neq v_i$

若一个变元如果不是自由 (*not free*) 的, 则我们称它为 (受) 约束的 (*bounded*)。若一个 wff 没有自由出现的变元, 则称它是闭公式 (*closed wff*) 或语句 (*sentence*)



$$(\varphi)_2^k = \left(\sum_{j=0}^k a_j \right)_2^k = \sum_{j=0}^2 a_j$$





$$(\varphi)_i^j = \left(\sum_{j=0}^k a_j \right)_i^j = \sum_{j=0}^k a_j$$





变元替换

定义 2.5a (替换, *substitution*) [Enderton, pp.112]

wff中的变元替换 (substitution) 可递归地定义如下:

1. 对任意原子公式 α , α_t^x 是用项 t 代替 α 中出现的所有 x 后所得的表达式
2. $(\neg \alpha)_t^x = (\neg \alpha_t^x)$
3. $(\alpha \rightarrow \beta)_t^x = (\alpha_t^x \rightarrow \beta_t^x)$
4. $(\forall y \alpha)_t^x = \begin{cases} \forall y \alpha, & \text{if } x = y \\ \forall y (\alpha)_t^x, & \text{if } x \neq y \end{cases}$

我们记这个替换算子为 $\theta = [t/x]$, 则 $\alpha_t^x = \alpha \circ \theta = \alpha\theta$



$$\left[\sum_{j=0}^n (k \cdot a_j) \right]_{f(j)}^k \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^n (f(j) \cdot a_j)$$





可替换

定义 2.5b (可替换, *substitutable*) [Enderton, pp.II2]

我们定义项 t 对于 α 中的变元 x 是**可替换的** (substitutable) 如下:

1. 对任意原子公式 α , 项 t 对于 α 中出现的所有 x 都是可替换的 (原子公式无量词)
2. 项 t 对于 $(\neg\alpha)$ 中的 x 是可替换的, 当且仅当它对 α 中出现的 x 是可替换的
3. 项 t 对于 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 中的 x 是可替换的, 当且仅当它对 α 和 β 中出现的 x 均是可替换的
4. 项 t 对于 $\forall y \alpha$ 中的 x 是可替换的当且仅当:
 - » x 在 $\forall y \alpha$ 中是**约束出现的** (为保证替换后不影响原公式意义), 或者
 - » y 在 t 中**未出现** (为保证 t 中的变元不在替换后被 $\forall y$ 量化) 且 t 对于 α 中的 x 是可替换的



替换的例子

一阶逻辑的 Hilbert 系统里有一条公理模式：

$$\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$$

其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的，那么：





替换的例子

一阶逻辑的 Hilbert 系统里有一条公理模式：

$$\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$$

其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的，那么：

› 以下 wff 是该公理模式的一个实例

$$\forall v_3 (\forall v_1 (Av_1 \rightarrow \forall v_2 Av_2) \rightarrow (Av_2 \rightarrow \forall v_2 Av_2))$$

» 其中 α 是 $(Av_1 \rightarrow \forall v_2 Av_2)$ ， x 是 v_1 ， t 是 v_2



替换的例子

一阶逻辑的 Hilbert 系统里有一条公理模式：

$$\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$$

其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的，那么：

› 以下 wff 是该公理模式的一个实例

$$\forall v_3 (\forall v_1 (Av_1 \rightarrow \forall v_2 Av_2) \rightarrow (Av_2 \rightarrow \forall v_2 Av_2))$$

» 其中 α 是 $(Av_1 \rightarrow \forall v_2 Av_2)$ ， x 是 v_1 ， t 是 v_2

› 以下 wff 则不是该公理模式的实例

$$\forall v_1 \neg \forall v_2 Bv_1v_2 \rightarrow \neg \forall v_2 Bv_2v_2$$

» 因为 v_2 在 $\neg \forall v_2 Bv_1v_2$ 中受约束，因此它不能替换这里的 v_1





证明





证明的定义

定义 2.6 (定义 1.19-21) (*proof, deduction, or derivation*) [Enderton, pp.III]:

从 Γ 到 φ 的**证明** (推导) 是一个有穷的 wff 序列 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$, 其中 α_n 就是 φ 且对任意 $k \leq n$ 有

1. α_k 属于 $\Gamma \cup \Lambda$ (Λ 为公理集), 或者
2. α_k 是由序列中位于它前面的两个 wff 经过 MP 规则推导而得; 即存在 $i, j \leq k$ 有 α_j 为 $\alpha_i \rightarrow \alpha_k$

若以上证明存在, 我们就说 φ 是从 Γ 出发**可证的** (*provable, deducible or derivable*), 或称 φ 是 Γ 中的**定理** (*theorem of Γ*), 记为 $\Gamma \vdash \varphi$





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:

I. 重言式（例如定义 1.22 中的公理）





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:

1. 重言式 (例如定义 1.22 中的公理)
2. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的
 - » 它的逆否命题也是公理: $\beta \rightarrow \exists x \beta_x^t$, 其中 x 不在 t 中出现





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:

1. 重言式 (例如定义 1.22 中的公理)
2. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的
 - » 它的逆否命题也是公理: $\beta \rightarrow \exists x \beta_x^t$, 其中 x 不在 t 中出现
3. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:

1. 重言式 (例如定义 1.22 中的公理)
2. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的
 - » 它的逆否命题也是公理: $\beta \rightarrow \exists x \beta_x^t$, 其中 x 不在 t 中出现
3. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
4. $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:

1. 重言式 (例如定义 1.22 中的公理)
2. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的
 - » 它的逆否命题也是公理: $\beta \rightarrow \exists x \beta_x^t$, 其中 x 不在 t 中出现
3. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
4. $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
5. (有等词时) $x = x$





一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Enderton, pp.110]:

令 α 与 β 为 FOL wff, x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括:

1. 重言式 (例如定义 1.22 中的公理)
2. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的
 - » 它的逆否命题也是公理: $\beta \rightarrow \exists x \beta_x^t$, 其中 x 不在 t 中出现
3. $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
4. $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
5. (有等词时) $x = x$
6. (有等词时) $(x = y) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$, 其中 α 为原子公式, α' 为对 α 中的 x 进行 0 个或多个位置的替换后得到的 wff



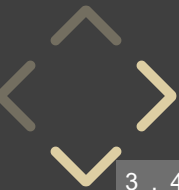


一阶逻辑中的公理系统

(续) 定义 2.7 (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) :

该公理系统中只有一条 MP 推理规则, 即若推导中已有 $\beta \rightarrow \alpha$ 和 β , 那么 α 也是正确的, 即:

$$\beta, (\beta \rightarrow \alpha) \vdash \alpha$$





一阶逻辑推导的例子

试证：公理 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$





一阶逻辑推导的例子

试证：公理 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明：

Lemma 1: $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ ，根据演绎定理，即证 $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$





一阶逻辑推导的例子

试证：公理 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明：

Lemma 1: $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ ，根据演绎定理，即证 $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ AX 1.22.9
2. $\alpha \rightarrow \beta$ Hyp
3. $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ 1, 2 MP
4. $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$ Ax, 1.22.7
5. $\neg\beta$ Hyp
6. $\alpha \rightarrow \neg\beta$ 4, 5 MP
7. $\neg\alpha$ 3, 6 MP





一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明（Cont'd）：





一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明 (Cont'd) :

Lemma 2 (*syllogism*) : $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, 用演绎定理易证





一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明 (Cont'd) :

Lemma 2 (*syllogism*) : $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, 用演绎定理易证

Lemma 3: $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$, 根据演绎定理, 即证 $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$





一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

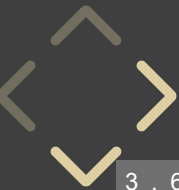
$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明 (Cont'd) :

Lemma 2 (*syllogism*) : $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, 用演绎定理易证

Lemma 3: $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$, 根据演绎定理, 即证 $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$

- | | | |
|----|--|-------------|
| 1. | α | Hyp |
| 2. | $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha))$ | Ax 1.22.3 |
| 3. | $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \perp)$ | Rewrite/Def |
| 4. | $\neg\alpha \rightarrow \perp$ | 1, 3 MP |
| 5. | $(\neg\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\neg\alpha$ | Ax 1.22.13 |
| 6. | $\neg\neg\alpha$ | 4, 5 MP |





一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明（Cont'd）：





一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \rightarrow \exists y Py$$

证明 (Cont'd) :

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px$ | AX 2.7.2 |
| 2. | $(\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px) \rightarrow (\neg \neg Px \rightarrow \neg \forall y \neg Py)$ | Lemma 1 |
| 3. | $\neg \neg Px \rightarrow \neg \forall y \neg Py$ | 1, 2 MP |
| 4. | $\neg \neg Px \rightarrow \exists y Py$ | Rewrite 3 |
| 5. | $(Px \rightarrow \neg \neg Px) \rightarrow [(\neg \neg Px \rightarrow \exists y Py) \rightarrow (Px \rightarrow \exists y Py)]$ | Lemma 2 |
| 6. | $Px \rightarrow \neg \neg Px$ | Lemma 3 |
| 7. | $(\neg \neg Px \rightarrow \exists y Py) \rightarrow (Px \rightarrow \exists y Py)$ | 5, 6 MP |
| 8. | $Px \rightarrow \exists y Py$ | 4, 7 MP |

Q.E.D.





一阶逻辑推导的例子2

试证：

$$\vdash (\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x (Px \wedge Qx)$$





一阶逻辑推导的例子2

试证：

$$\vdash (\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x (Px \wedge Qx)$$

证明：

Lemma: $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$, 根据演绎定理和公理I.22.3易证





一阶逻辑推导的例子2

试证:

$$\vdash (\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x (Px \wedge Qx)$$

证明:

Lemma: $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$, 根据演绎定理和公理1.22.3 易证

1. $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$ Ax 1.22.1
2. $\forall x Px \rightarrow Pt$ AX 2.7.2
3. $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow Pt$ 1, 2 Syl.
4. $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall y Qy$ Ax 1.22.1
5. $\forall y Qy \rightarrow Qt$ AX 2.7.2
6. $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow Qt$ 4, 5 Syl.
7. $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow (Pt \wedge Qt)$ 3, 6 Lemma
8. $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x (Px \wedge Qx)$ Ded. and Gen.

Q.E.D.





一阶逻辑的元定理



演绎定理

引理 2.8 (T 规则) [Enderton, pp.118]:

若 $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 且 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 重言蕴涵 β (即 $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)))$ 为重言式), 则 $\Gamma \vdash \beta$

› 通过 n 次 MP 推理可证

定理 2.9 (演绎定理) [Enderton, pp.118]:

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

› **证明:** 见命题逻辑的演绎定理 (1.25)



一些其它的元定理

推论 2.10 (逆否命题, *Contraposition*) [Enderton, pp.119]:

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

› 前面的例子中已证

推论 2.11 (归谬, *Reductio ad Absurdum*, *RAA*) [Enderton, pp.119]:

若 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致, 则 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

› 证明过程与命题逻辑的定理 I.30 类似



定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$



概括定理

定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$

证明:

令 φ 存在一个证明 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n = \varphi \rangle$, 利用对证明长度施归纳即可证明该定理。

- **奠基:** 当证明长度为 1 时, $\varphi \in \Gamma$, 根据公理 2.7.4 可知当 x 不在 φ 中自由出现时有 $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$, 根据演绎定理可得 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$



概括定理

定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$



概括定理

定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$

证明 (续):

- > **归纳:** 假设 $j < i$ 时对任意 j 有该结论成立, 下面对于 α_i 分情况讨论:
 - » $\alpha_i \in \Lambda$, 根据定义有 $\forall x \alpha_i$ 依然是逻辑公理, 显然有 $\Gamma \vdash \forall x \alpha_i$ (尽管 x 可能在 α_i 中出现, 但不影响结论)
 - » $\alpha_i \in \Gamma$, 与奠基情况一致
 - » α_i 由 α_j 与 $\alpha_j \rightarrow \alpha_i$ 通过 MP 规则得到。由归纳假设有 $\Gamma \vdash \forall x \alpha_j$ 且 $\Gamma \vdash \forall x (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$ 。对公理 2.7.3

$$\forall x (\alpha_j \rightarrow \alpha_i) \rightarrow (\forall x \alpha_j \rightarrow \forall x \alpha_i)$$

运用两次 MP 规则即可得 $\Gamma \vdash \forall x \alpha_i$

Q.E.D.



概括定理

定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$

- › 可见, 公理 2.7.3 与 2.7.4 存在的作用就是为了证明概括定理
 - » **2.7.3** $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
 - » **2.7.4** $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现



概括定理

定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$

- › 可见, 公理 2.7.3 与 2.7.4 存在的作用就是为了证明概括定理
 - » **2.7.3** $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
 - » **2.7.4** $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- › 概括定理在有些逻辑系统中被作为推理规则 (如 Gentzen 的 LK 自然演绎系统等)
 - » 若能对 x 不进行假设 (约束) 即可证明命题 $__x__$, 那么可以说“由于 x 的任意性, 我们有 $\forall x __x__$ 成立”



概括定理

定理 2.9 (概括定理) [Enderton, pp.117]:

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x \varphi$

- › 可见, 公理 2.7.3 与 2.7.4 存在的作用就是为了证明概括定理
 - » **2.7.3** $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$
 - » **2.7.4** $\alpha \rightarrow \forall x \alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现
- › 概括定理在有些逻辑系统中被作为推理规则 (如 Gentzen 的 LK 自然演绎系统等)
 - » 若能对 x 不进行假设 (约束) 即可证明命题 $__x__$, 那么可以说“由于 x 的任意性, 我们有 $\forall x __x__$ 成立”
- › 常见的用法: “*without loss of generality*” (不失一般性, WLOG)
 - » 用特例代替一般性推理, 最后概括 (同时使用公理 2.7.2 与概括定理)



另一套公理系统

定义 2.7' (一阶逻辑的公理系统, *Axiomatic system for FOL*) [Open Logic, section 10.1]:

公理 (Λ):

1. 命题逻辑公理 (定义 1.22) 的 FOL 概括
2. 关于量词的公理: 对闭项 (*closed term*, 即不含变元的项) 有
 - » $\forall x \beta \rightarrow \beta_t^x$
 - » $\beta(t) \rightarrow \exists x \beta$ [Enderton, pp. 124] (*Rule EI*)

推理规则:

1. MP 规则
2. 关于量词的推理规则 (QR):
 - » 若 $\beta \rightarrow \alpha(a)$ 已经出现在证明序列中, 且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现, 那么 $\beta \rightarrow \forall x \beta(x)$ 是正确的
 - » 若 $\alpha(a) \rightarrow \beta$ 已经出现在证明序列中, 且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现, 那么 $\exists x \beta(x) \rightarrow \beta$ 是正确的

概括定理



例：





概括定理

例:

I. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qc$, 显然



概括定理

例:

1. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qc$, 显然
2. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qy$, 和1类似



概括定理

例:

1. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qc$, 显然
2. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qy$, 和1类似
3. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash \forall y Qy$, 不失一般性



概括定理

例：

1. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qc$, 显然
2. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash Qy$, 和1类似
3. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash \forall y Qy$, 不失一般性
4. $\{\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall z Pz\} \vdash \forall x Qx$, 约束变元换名



常数概括定理

推论 2.13 (常数概括, *Generalisation on Constants*) [Enderton, pp.123]:

假设 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 c 是一个不在 Γ 中出现的常数符号。则存在变元 y , y 不在 φ 中出现, 使得 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$ 成立。更进一步, 存在一个从 Γ 到 $\forall y \varphi_y^c$ 不含 c 的推演

证明:

令 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n = \varphi \rangle$ 是从 Γ 到 φ 的一个证明, 令 y 为第一个不在任意 $\alpha_i, i \in \{0, \dots, n\}$ 中出现的变元。那么可以断言

$$\langle (\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_n)_y^c \rangle$$

是一个从 Γ 到 φ_y^c 的一个推演。为证明这个断言, 需验证每个 $(\alpha_k)_y^c$ 要么属于 $\Gamma \cup \Lambda$, 要么根据 MP 规则从 $\{(\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_{k-1})_y^c\}$ 中推导而来。



常数概括定理

推论 2.I3 (常数概括, *Generalisation on Constants*) [Enderton, pp.123]:

假设 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 c 是一个不在 Γ 中出现的常数符号。则存在变元 y , y 不在 φ 中出现, 使得 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$ 成立。更进一步, 存在一个从 Γ 到 $\forall y \varphi_y^c$ 不含 c 的推演

证明 (续):

下面对未作替换的 α_k 分情况讨论:

1. $\alpha_k \in \Gamma$: 因此 c 不在 α_k 中出现, 可知 $(\alpha_k)_y^c = \alpha_k \in \Gamma$
2. $\alpha_k \in \Lambda$: 即 α_k 为定义 2.7 中的逻辑公理, 那么在 $(\alpha_k)_y^c$ 依然是一条逻辑公理 (Why?), 因此 $(\alpha_k)_y^c \in \Lambda$
3. α_k 是由 α_i 与 $\alpha_j = (\alpha_i \rightarrow \alpha_k)$ ($i, j < k$) 用 MP 规则推出: 那么有 $(\alpha_j)_y^c = ((\alpha_i)_y^c \rightarrow (\alpha_k)_y^c)$, 因此可知 $(\alpha_k)_y^c$ 可由 $(\alpha_i)_y^c$ 与 $(\alpha_j)_y^c$ 经过 MP 规则导出



常数概括定理

推论 2.13 (常数概括, *Generalisation on Constants*) [Enderton, pp.123]:

假设 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 c 是一个不在 Γ 中出现的常数符号。则存在变元 y , y 不在 φ 中出现, 使得 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$ 成立。更进一步, 存在一个从 Γ 到 $\forall y \varphi_y^c$ 不含 c 的推演

证明 (续):

下面对未作替换的 α_k 分情况讨论:

1. $\alpha_k \in \Gamma$: 因此 c 不在 α_k 中出现, 可知 $(\alpha_k)_y^c = \alpha_k \in \Gamma$
2. $\alpha_k \in \Lambda$: 即 α_k 为定义 2.7 中的逻辑公理, 那么在 $(\alpha_k)_y^c$ 依然是一条逻辑公理 (Why?), 因此 $(\alpha_k)_y^c \in \Lambda$
 - » 若 α_k 是命题逻辑中的重言式, 替换其中常量得到的仍然是重言式。例如 $Pc \rightarrow \neg\neg Pc$, 显然有 $(Pc \rightarrow \neg\neg Pc)_y^c = Py \rightarrow \neg\neg Py$, 它仍是逻辑公理
3. α_k 是由 α_i 与 $\alpha_j = (\alpha_i \rightarrow \alpha_k)$ ($i, j < k$) 用 MP 规则推出: 那么有 $(\alpha_j)_y^c = ((\alpha_i)_y^c \rightarrow (\alpha_k)_y^c)$, 因此可知 $(\alpha_k)_y^c$ 可由 $(\alpha_i)_y^c$ 与 $(\alpha_j)_y^c$ 经过 MP 规则导出



常数概括定理

推论 2.13 (常数概括, *Generalisation on Constants*) [Enderton, pp.123]:

假设 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 c 是一个不在 Γ 中出现的常数符号。则存在变元 y , y 不在 φ 中出现, 使得 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$ 成立。更进一步, 存在一个从 Γ 到 $\forall y \varphi_y^c$ 不含 c 的推演

证明 (续):

下面对未作替换的 α_k 分情况讨论:

1. $\alpha_k \in \Gamma$: 因此 c 不在 α_k 中出现, 可知 $(\alpha_k)_y^c = \alpha_k \in \Gamma$
2. $\alpha_k \in \Lambda$: 即 α_k 为定义 2.7 中的逻辑公理, 那么在 $(\alpha_k)_y^c$ 依然是一条逻辑公理 (Why?), 因此 $(\alpha_k)_y^c \in \Lambda$
 - » 若 α_k 是命题逻辑中的重言式, 替换其中常量得到的仍然是重言式。例如 $Pc \rightarrow \neg\neg Pc$, 显然有 $(Pc \rightarrow \neg\neg Pc)_y^c = Py \rightarrow \neg\neg Py$, 它仍是逻辑公理
 - » 若 α_k 是 $\forall x \psi \rightarrow \psi_t^x$, 那么 $(\alpha_k)_y^c$ 就是 $\forall x \psi_y^c \rightarrow (\psi_t^x)_y^c$ 。注意到 $(\psi_t^x)_y^c$ 正是 $(\psi_y^c)_t^{x_y}$, 所以它也是逻辑公理。其它组的公理也容易验证
3. α_k 是由 α_i 与 $\alpha_j = (\alpha_i \rightarrow \alpha_k)$ ($i, j < k$) 用 MP 规则推出: 那么有 $(\alpha_j)_y^c = ((\alpha_i)_y^c \rightarrow (\alpha_k)_y^c)$, 因此可知 $(\alpha_k)_y^c$ 可由 $(\alpha_i)_y^c$ 与 $(\alpha_j)_y^c$ 经过 MP 规则导出



常数概括定理

推论 2.13 (常数概括, *Generalisation on Constants*) [Enderton, pp.123]:

假设 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 c 是一个不在 Γ 中出现的常数符号。则存在变元 y , y 不在 φ 中出现, 使得 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$ 成立。更进一步, 存在一个从 Γ 到 $\forall y \varphi_y^c$ 不含 c 的推演

证明 (续):

由上面的推导可知, $\langle (\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_n)_y^c \rangle$ 的确是 φ_y^c 的一个推演。

令 Φ 为 $\langle (\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_n)_y^c \rangle$ 中所有 $\alpha_i \in \Gamma$ 构成的集合。

- › 显然 Φ 是一个有穷集合, 有 y 不在 Φ 中出现且 $\Phi \vdash \varphi_y^c$
- › 根据概括定理, $\Phi \vdash \forall y \varphi_y^c$, 所以 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$

注意到概括定理的证明中不会引入新的常元, 这样就可以得到一个从 Γ 到 $\forall y \varphi_y^c$ 的证明, 且 c 不出现在其中。
Q.E.D.



约束变元替换

我们想证：

$$\vdash \forall x \forall y Pxy \rightarrow \forall y Pyy$$

由于 $\forall x \forall y Pxy$ 中的 x 不能用 y 进行替换，所以它无法套用公理 2.7.2。



约束变元替换

我们想证：

$$\vdash \forall x \forall y Pxy \rightarrow \forall y Pyy$$

由于 $\forall x \forall y Pxy$ 中的 x 不能用 y 进行替换，所以它无法套用公理 2.7.2。

但如果我们有

$$\vdash \forall x \forall z Pxz \rightarrow \forall y Pyy$$

显然就会好证很多。



约束变元替换

我们想证：

$$\vdash \forall x \forall y Pxy \rightarrow \forall y Pyy$$

由于 $\forall x \forall y Pxy$ 中的 x 不能用 y 进行替换，所以它无法套用公理 2.7.2。

但如果我们有

$$\vdash \forall x \forall z Pxz \rightarrow \forall y Pyy$$

显然就会好证很多。

那么只需要有

$$\vdash \forall x \forall y Pxy \rightarrow \forall x \forall z Pxz$$

就能证明最开始的结论。



定理 2.14 (约束变元替换定理, *Alphabetic Variants*) [Enderton, pp.126]:

令 φ 是一个 wff, t 是一个项, x 是一个变元。总可以找到一个 wff φ' , 它和 φ 的差别仅在于约束变元, 使得

1. $\varphi \vdash \varphi'$ 且 $\varphi' \vdash \varphi$
2. t 可以在 φ' 中无冲突地替换 x



ALPHABETIC VARIANTS

定理 2.14 (约束变元替换定理, *Alphabetic Variants*) [Enderton, pp.126]:

令 φ 是一个 wff, t 是一个项, x 是一个变元。总可以找到一个 wff φ' , 它和 φ 的差别仅在于约束变元, 使得

1. $\varphi \vdash \varphi'$ 且 $\varphi' \vdash \varphi$
2. t 可以在 φ' 中无冲突地替换 x

该定理的目的是当 t 无法被用来替换 x 时, 可以通过对约束变元换名来实现合法替换。

证明概要:

1. 不失一般性, 可固定 t 和 x 并递归地从 φ 构造 φ' , 通过结构归纳进行证明
 - » 归纳假设为: 应用构造算子前有 $\varphi \vdash \varphi'$ (或 $\varphi' \vdash \varphi$)
2. 无量词情况较简单; 对于有量词的情况构造 $(\forall y \varphi)' = \forall z (\varphi')_z^y$, 其中 z 不在 φ' , x 和 t 中出现, 这时 t 便可用来替换其中的 x (定理结论 2 成立)
3. 运用概括定理易证定理结论 1 成立



与等词有关的元定理

1. $\vdash \forall x (x = x)$
2. $\vdash \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$
3. $\vdash \forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z))$
4. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (Px_1x_2 = Py_1y_2)))$, P 为一二元谓词
5. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (fx_1x_2 = fy_1y_2)))$, f 为一二元函数