



数理逻辑

OI - 命题逻辑简介

(Press **?** for help, **n** and **p** for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2025年 - 春季

<https://daiwz.net>



语法



前情提要

- › “我可以怀疑物理世界是否存在。我甚至可以怀疑我的身体是否真的存在。但我不能怀疑我自己是否存在。所以，我不是我的身体。”
- › 原文：‘I can doubt that the physical world exists. I can even doubt whether my body really exists. I cannot doubt that I myself exist. So I am not my body.’
- › 这种推理似乎得到了笛卡尔的《沉思录》的支持（尽管我们可以争论归属）。这个论证有效吗？



前情提要

回顾：根据形式化的一些基本假设，若能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非 A ”和“ A 并且 B ”，甚至“ A 蕴涵 B ”的真假。

- › “命题”是陈述句，非真即假
 - » 分析命题 vs 综合命题
- › 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”.....
- › 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- › 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）



命题逻辑中的符号

符号	中文名	意义
(	左括号	标点
)	右括号	标点
$\neg$	非运算符	并非
$\wedge$	合取运算符	与
$\vee$	析取运算符	或
$\rightarrow$	蕴涵符	若...则...
$\leftrightarrow$	双蕴涵符	当且仅当
A_1	第1个命题符	
A_2	第2个命题符	
...		
A_n	第n个命题符	
...	(可数无穷个)	



命题逻辑中的符号

- I. 我们使用一些不属于“命题逻辑符号”中的符号来帮助我们进行书写和理解，这些符号成为元语言（meta-language）
2. “符号”可构成序列
 - » 简写： $\langle (, \neg, A_1,) \rangle = (\neg A_1)$
 - » 表达式的长度是其中符号出现的数目
 - » 长度为0的表达式称为空表达式，用记号 ϕ 表示
 - » 这里的“ $\langle$ ”、“ $\rangle$ ”和“ ϕ ”都是元语言中的符号（vs “对象语言”）
3. 命题逻辑语言中：任意一个符号都不是由其他符号构成的有穷序列
 - » 例如： $A_3 \neq \leftrightarrow$, $A_3 \neq \langle \neg, A_4, () \rangle$
 - » 这意味着若

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$$

那么必有 $m = n$ 且 $a_i = b_i$ [Enderton, pp.4]

- » 这里的变元符号 a_i 、 b_j 同样属于元语言



表达式 (EXPRESSION)

定义 I.I: 表达式 (*expression*) 是有穷个符号构成的序列。

例如:

- > $(\neg \mathbf{A}_1)$, $((\mathbf{A}_2$
- > 若 α 和 β 是表达式, 则它们的拼接也是表达式, 例如:

$$\alpha = (\neg \mathbf{A}_1)$$

$$\beta = (\mathbf{A}_2)$$

则 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 是

$$((\neg \mathbf{A}_1) \rightarrow \mathbf{A}_2)$$



合式公式 (WELL-FORMED FORMULAS)

定义 1.2 (wff) :

1. 每个命题符号 A_i 都是合式公式 (原子公式, atomic formula)
2. 若 α, β 是合式公式, 那么 $(\neg\alpha)$ 和 $(\alpha\Box\beta)$ 也是合式公式。其中 $\Box$ 是 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 中的一个
3. 除此以外都不是合式公式。

也可以用 Bacus-Naur Form 定义命题为

$$\varphi ::= A_i \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid (\varphi_1 \vee \varphi_2) \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \mid (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$$



定义 1.3 (公式构造运算, *formula-building operations*) :

$$\mathcal{E}_{\neg}(\alpha) = (\neg\alpha)$$

$$\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$$

$$\mathcal{E}_{\vee}(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$$

$$\mathcal{E}_{\rightarrow}(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\mathcal{E}_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta) = (\alpha \leftrightarrow \beta)$$



WFF 的构造序列

定义 I.4 (构造序列, *construction sequence*) :

有穷序列 $\langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \rangle$ 被称为一个命题公式的构造序列, 当且仅当对任意 $i \leq n$ 满足以下条件之一:

1. ϵ_i 是一个命题符号
2. $\epsilon_i = \mathcal{E}_{\neg}(\epsilon_j), j < i$
3. $\epsilon_i = \mathcal{E}_{\square}(\epsilon_j, \epsilon_k), j < i$ 且 $k < i$

其中 $\square$ 是 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 中的一个



$$((\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_{10}) \rightarrow ((\neg \mathbf{A}_3) \vee (\mathbf{A}_8 \leftrightarrow \mathbf{A}_3)))$$



结构递归



递归定义

› 自上而下:

$$S^* = \bigcap \{S \mid S \text{ 包含所有命题符号且关于五种公式构造运算封闭}\}$$

› 自下而上:

$$\gg S_0 = \{\mathbf{A}_1, \dots\}$$

$$\gg S_i = \{\neg\alpha \mid \alpha \in S_{i-1}\} \cup \{\alpha \Box \beta \mid \alpha \in S_{i-1}, \beta \in S_{i-1}, \Box = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup S_{i-1}$$

$$\gg S_* = \bigcup_n S_n$$



递归定义

定理 I.5 [Enderton, pp.37]:

$$S^* = S_*$$

记法： 令 $S = S^* = S_*$

- › 自下而上定义的好处在于展现了每个 wff 的构造过程
- › 自上而下的定义告诉我们 S 是一个闭包 (closure), 因此可以运用归纳原理 (Induction Principle) 进行证明和理解 [Enderton, pp.37]



定理 I.6（关于命题逻辑 wff 的归纳原理）[Hao, Yang and Yang, pp.28]:

令 $P(\alpha)$ 为一个关于 wff 的性质。假设：

1. 对所有命题符号 $\mathbf{A}_i$ ，性质 $P(\mathbf{A}_i)$ 成立
2. 对所有的 wff α 和 β ，若 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 成立，则 $P(\neg\alpha)$ 和 $P((\alpha \square \beta))$ 也成立，其中 $\square$ 是 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 中的任意一个

那么对于所有的 wff α 有性质 $P(\alpha)$ 成立。

证明：依结构归纳/强数学归纳法，显然。



归纳原理

例1.7: 证明 S 是无穷可数集, 即 $|S| = |\mathbb{N}|$

证明概要:

1. 命题符号的个数为 $|\mathbb{N}|$
2. 任意 wff 均由有限步生成
3. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ (显然!)



括号引理

引理 1.8:

1. 每个 wff 中左右括号的数目相同
2. 每个 wff 的非空真初始段中左括号多于右括号。因此，wff 的真前段一定不是 wff

1.8.a 证明概要 [Enderton, pp.19]:

记“括号平衡”为性质 P

1. Base: 对于原子公式 $\alpha = A_i$ 显然有 $P(\alpha)$ 成立

2. Induction step:

» Hypothesis: 设 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 均成立

» $(\neg\alpha)$ 和 $(\alpha\Box\beta)$ 仅添加最外侧括号，所以 $P((\neg\alpha))$ 与 $P((\alpha\Box\beta))$ 成立

Q.E.D.



括号引理

1.8.b 证明概要 [Enderton, pp.30]:

记“左括号比右括号多”为性质 P

1. Base: 对于原子公式 $\alpha = \mathbf{A}_i$ 显然有 $P(\alpha)$ 成立 (无真初始段)

2. Induction step:

- » Hypothesis: 设 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 均成立
- » 以 $\mathcal{E}_\wedge$ 为例, 列举其所有可能真初始段, 易知均满足性质 P
- » 类似可证明其他构造运算下的情况。Q.E.D.



唯一可读性



魯哀公問於孔子曰：「樂正夔一足，信乎？」

孔子曰：「昔者舜欲以樂傳教於天下，乃令重黎舉夔於草莽之中而進之，舜以為樂正。夔於是正六律，和五聲，以通八風，而天下大服。重黎又欲益求人，舜曰：『夫樂，天地之精也，得失之節也，故唯聖人為能和。樂之本也。夔能和之，以平天下。若夔者一而足矣。』故曰夔一足，非一足也。」
（《呂氏春秋》，慎行論·察傳）

能否省略 WFF 中的括号?



$$\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3$$



$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

$$A \times B \rightarrow C$$



公式的结构

定理 1.9:

wff 恰好具有以下六种形式之一:

1. 原子公式, 即命题词 A_i
2. $(\neg \alpha)$
3. $(\alpha \wedge \beta)$
4. $(\alpha \vee \beta)$
5. $(\alpha \rightarrow \beta)$
6. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

不仅如此, 在情形 2~6 中, 公式 α 和 β 还有二元联词 $\square$ 都是**唯一**的。



公式的结构

例1.10: 公式

$$\gamma = (((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_8 \rightarrow \mathbf{A}_{10})) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_{10}))$$

具有哪种形式?

1. $\gamma = \alpha$
2. $\gamma = (\neg \alpha)$
3. $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$
4. $\gamma = (\alpha \vee \beta)$
5. $\gamma = (\alpha \rightarrow \beta)$
6. $\gamma = (\alpha \leftrightarrow \beta)$



算法 I.IO: 解析算法 [ENDERTON, PP.31]

‣ 输入: 命题逻辑 wff φ

‣ 输出: φ 的解析树 T

1. 令 $T = \varphi$ (根节点)
2. 若所有的叶子均为原子公式, 则终止并输出 T ; 否则对 T 进行遍历, 直到找到一个非原子公式的叶子节点 N , 跳转至 3
3. 表达式 N 的第一个符号必须为 $($ 。若第二个符号是 $\neg$, 跳转至 5; 否则跳转至 4
4. 从 $($ 开始, 从左至右扫描得到一个括号平衡的 α
 - α 的下一个符号必须为 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 之中的一个
 - 符号序列的剩余段为 β), 它必须包含一个括号平衡的 β 与 $)$
 - 在 N 上分别创建左右子树 α 与 β , 跳转至 2
5. 表达式 N 的前两个符号为 $(\neg$
 - 符号序列的剩余段为 β), 它必须包含一个括号平衡的 β 与 $)$
 - 在 N 上分别创建一颗子树 β , 跳转至 2



唯一可读性定理 [ENDERTON, PP.40]

定理 I.II (Unique Readability Theorem) :

对于五种公式构造运算在 S (即所有 wff) 上的限制 $\mathcal{E}_{\neg}|_S$ 和 $\mathcal{E}_{\Box}|_S$:

1. 值域 (range) 互不相交
2. 是一一映射

这意味着 S 是由命题集合 $\{A_1, \dots\}$ 通过五种构造算子自由生成的。

I.II 证明概要 [Enderton, pp.40]:

I. 先证明算子是一一的:

» 例如: 若 $\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta) = (\gamma \wedge \delta) = \mathcal{E}_{\wedge}(\gamma \wedge \delta)$, 则必有 $\alpha = \gamma$ 且 $\beta = \delta$, 否则与定理 1.8. b 矛盾

2. 再证明值域不相交 (算子定义)

» 例如: 若 $\alpha \wedge \beta = \gamma \rightarrow \delta$, 则有 $\alpha = \gamma$ 、 $\beta = \delta$ 且 $\wedge = \rightarrow$,



WFF 的简写

括号太多，不方便书写和阅读

› 通常省略最外层的括号

$$(((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3))$$

可写成

$$((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

› 辅助符号引入方括号、大括号

$$((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

可写成

$$[(\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)] \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$



WFF 的简写

› 约定联结符号的优先级, 例如

$$\langle \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \rangle$$

›

$$((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

可写成

$$\neg \mathbf{A}_1 \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

›

$$\mathbf{A}_1 \vee (((\neg \mathbf{A}_1) \wedge \mathbf{A}_3) \vee (\neg(\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)))$$

可写成

$$\mathbf{A}_1 \vee (\neg \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3 \vee \neg(\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3))$$



语义



逻辑系统的两面

- › **语法**：符号表达式的形式结构
- › **语义**：符号和符号表达式的涵义（给符号以某种解释）
 - » 关于“真”
 - » 只与话题无关词汇相关



定义 1.12 (truth assignment) :

对于命题符号集合 S , 一个真值指派 v 是一个函数

$$v : S \rightarrow \{F, T\}$$



联结词定义的布尔函数

令真值集 $\mathcal{B} = \{T, F\}$,

- › 联结词 $\neg$ 被解释为一元布尔函数 $B_{\neg} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$
- › 联结词 $\square$ 被解释为二元布尔函数 $B_{\square} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$
 - » 其中 $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

v_1	v_2	$B_{\neg}(v_1)$	$B_{\vee}(v_1, v_2)$	$B_{\wedge}(v_1, v_2)$	$B_{\rightarrow}(v_1, v_2)$	$B_{\leftrightarrow}(v_1, v_2)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T



命题的语义

定义 I.12' (truth assignment, extended) :

- I. v 是一个真值指派 (赋值) 指它是一个函数 $v : S \rightarrow \{F, T\}$, 从而对于任何命题符号 $\mathbf{A}_i \in S$, $v(\mathbf{A}_i)$ 为 T 或 F
2. 对于任何真值指派 v , 定义 $\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{F, T\}$ 如下
 - » $\bar{v}(\mathbf{A}_i) = v(\mathbf{A}_i), i \in \mathbb{N}$
 - » $\bar{v}(\neg\alpha) = B_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$
 - » $\bar{v}(\alpha \square \beta) = B_{\square}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)), \square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$



wff 的语义

$$(\mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \rightarrow \mathbf{A}_6)$$

其中

$$> v(\mathbf{A}_1) = T$$

$$> v(\mathbf{A}_2) = T$$

$$> v(\mathbf{A}_6) = F$$

wff 的语义是否和可读性一样有唯一性？

换言之， $\bar{v}$ 是不是一个合法的函数？

(归纳定理^{*}) [Enderton, 39 & 41]



LEAN 4 EXAMPLE

证明： 设 $v, w : \text{String} \rightarrow \text{Bool}$ 是两个赋值函数。如果对任意原子 a 都有

$$v(a) = w(a),$$

则对于任意公式 ϕ ，都有

$$v(\phi) = w(\phi)$$



蕴涵

$$\Gamma \models \alpha$$



可满足性

定义 I.13 (satisfiability) :

设 $\alpha \in \bar{S}$, v 为 S 上的一个真值指派:

1. v 满足 α , 记为 $v \models \alpha$, 指 $\bar{v}(\alpha) = T$

» α 是可满足的, 指存在一种真值指派 v 使得 $v \models \alpha$

2. v 满足一个命题公式集合 $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 记为 $v \models \Sigma$, 指对任意 $\alpha_i \in \Sigma$, 有 $v \models \alpha_i$

» Σ 是可满足的, 指存在一种真值指派 v 使得 $v \models \Sigma$

> 若 $v \not\models \alpha$, 则 $v \models \neg \alpha$

> Γ 的可满足性蕴涵 Γ 中所有公式的可满足性, 反之不一定成立



可满足性问题

- › 给定一个**命题逻辑** wff α ，问是否存在一个真值指派 v ，使得 $v \models \alpha$ ？
 - » 此赋值 v 也被称为问题的一个**解**（solution）
- › 命题逻辑公式的可满足性问题（也称**布尔可满足性问题**）
 - » 第一个被证明的**NP 完全问题**（NP-Complete, NPC）
 - » 即它是 NP 问题且所有 NP 问题可以多项式时间归约到它
 - » 非确定性算法：将问题分解为猜测和验证两个部分
 - » 验证一个赋值是公式的一个解很容易（多项式时间，即 NP: Non-deterministic Polynomial Time）
 - » 找到一个解很困难
 - » 已知 $P \subseteq NP$ ，但有没有 $P = NP$ ？（千禧问题之一）



重言蕴涵、语义蕴涵、语义后承、逻辑推论.....

定义 I.14 (tautologically implies, entails) :

Σ **重言蕴涵** τ (记为 $\Sigma \models \tau$) 当且仅当所有**满足** Σ 的真值指派均**满足** τ

1. 当 $\Sigma = \emptyset$, 记为 $\emptyset \models \tau$ 或 $\models \tau$
 - » 意味着任意真值指派均满足 τ , 我们称 τ 为**重言式**或**永真式** (tautology)
2. 矛盾式重言蕴涵任意公式 (vacuous truth), 例如
 - » $\{A, \neg A\} \models B$
3. 逻辑等价性: 若 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 我们记为 $\alpha \models \beta$ 或者 $\alpha \simeq \beta$
 - » 容易证明, $\simeq$ 是一个**等价关系**
 - » 等价 wff 可以做等值替换, 例如 *de Morgan laws*



例： $\{A, A \rightarrow B\} \models B$



语义与语法间的关系

定理 I.15 (语义的演绎定理, *Semantic Deduction Theorem*) :

1. $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ 当且仅当 $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$
2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ 当且仅当 $\models \alpha_1 \rightarrow (\dots (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)) \dots)$

I.15.2 证明概要:

1. $\Rightarrow$ (反证法) : 假设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ 成立时, 存在 v 使得
$$\bar{v}(\alpha_1 \rightarrow (\dots (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)) \dots)) = F$$
 - » 蕴涵式赋值为假 ($H_{\rightarrow}$) 当且仅当前件为真后件为假, 可得 $\bar{v}(\alpha_1) = T$ 且
$$\bar{v}(\dots (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)) \dots) = F \dots$$
2. $\Leftarrow$ (反证法) : 略



紧致性定理（ Compactness Theorem ）：

一个wff集合是可满足的，当且仅当它的所有有穷子集（ finite subset ）可满足。

证明：

见[Enderton, pp.60]，类似的方法在soundness/completeness中会再次应用。



命题逻辑的语言够用吗？



WFF 与布尔函数

- 假设 α 是一个至多含有命题符号 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ 的 wff
- 那么 α 就决定了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{T, F\}^n \rightarrow \{T, F\}$

$v(\mathbf{A}_1), \dots, v(\mathbf{A}_n)$	$X_1, \dots, X_n$	$B_\alpha^n(X_1, \dots, X_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(\mathbf{A}_1), \dots, v_1(\mathbf{A}_n)$	$T, \dots, T$	$B_\alpha^n(T, \dots, T)$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$v_{2^n}(\mathbf{A}_1), \dots, v_{2^n}(\mathbf{A}_n)$	$F, \dots, F$	$B_\alpha^n(T, \dots, T)$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$



由 wff 实现的布尔函数 [ENDERTON, PP.46]

定义 I.I6:

令 α 为至多包含命题符号 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ 的 wff。我们定义由 α 实现 (realised) 的布尔函数 B_α^n (或忽略 n 记为 B_α)，使得

$$B_\alpha^n(X_1, \dots, X_n) = \bar{v}(\alpha)$$

其中 $X_i = v(\mathbf{A}_i)$ 。



命题逻辑的语法是否足够表达所有布尔函数？



命题联词

- › 我们赋予二元联词 $\rightarrow$ 的意义就是一个二元函数:
 - » $B_{\rightarrow} : \{T, F\}^2 \rightarrow \{T, F\}$
- › 而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数:
 - » $B_{\neg} : \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$
- › 我们称这种以 $\{T, F\}$ (或其任意 n 维卡氏积) 为定义域和值域的函数为布尔函数



问题:

- › 有多少种一元联词?
- › 有多少种二元联词?
- › 有多少种 n 元联词?



问题:

- › 有多少种不同意义的一元联词?
- › 有多少种二元联词?
- › 有多少种 n 元联词?



问题:

- › 有多少种一元布尔函数?
- › 有多少种二元联词?
- › 有多少种 n 元联词?



命题联词的合成

X	Y	$B_{\neg}(X)$	$B_{\vee}(X, Y)$	$B_{\top}(X)$	$B_{\downarrow}(X, Y)$
T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F
T	F		T		F
F	F		F		T

则 $B_{\top}(x) = B_{\vee}(B_{\neg}(x), x)$, 而 $B_{\downarrow}(x, y) = B_{\neg}(B_{\vee}(x, y))$



联词的完全组

- › 一个由 n 个命题符号组成的 wff 也可以看作一个 n 元联结词
- › **问题：**多少个 / 哪些命题联结词构成的集合就够用了？
- › 也就是说，只用 $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 五个联结词是否就可以实现任意 n 元布尔函数？



由布尔函数导出的 WFF [ENDERTON, PP.47]

定理 I.I7:

对任意 n 元布尔函数 $G : \{T, F\}^n \rightarrow \{T, F\}, n \geq 1$, 都存在一个 wff α 使得 $B_\alpha^n = G$, 即使得 α 能够实现 G 。



由布尔函数导出的 wff

例如,

X_1	X_2	X_3	$G(X_1, X_2, X_3)$
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

令

$$\alpha = (\neg \mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) \vee \\ (\neg \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee \\ (\mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee \\ (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)$$

检验: $G = B_{\alpha}^3$



由布尔函数导出的 WFF

I.I7 证明概要 [Enderton, pp.47]:

分情况讨论:

- I. 常函数: 例如恒为真 (重言式)、恒为假 (矛盾式)
2. 其他函数: 将映射至 T 的 $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ 列出来, 构造类似上例中的公式 G (Disjunctive Normal Form, DNF)
 - » 证明满足 G 的真值指派恰好令 B_α^n 输出 T
 - » 不满足 G 的真值指派恰好令 B_α^n 输出 F



联词的完全组

定义 I.I8:

称一组联词（布尔函数） C 是（功能）完全的（*complete*），如果任意 n 元布尔函数（ $n \geq 1$ ）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

- > $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完全的（定理 I.I7 证明中已经给出）
- > $\{\neg, \wedge\}$ 是完全的，因为 $B_{\vee}(X, Y) = B_{\neg}(B_{\wedge}(B_{\neg}(X), B_{\neg}(Y)))$



如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- › 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$ 、 $B_{\wedge}$ 或 $B_{\vee}$
- › 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备该性质
- › 归纳证明这点



联词的完全组

例 [Enderton, pp.50]:

$\{\wedge, \rightarrow\}$ 不是一个功能完全的联词组。

证明概要:

- I. 观察: 若 wff 中只有这两个联词, 且其中的命题的赋值均为 T , 则该公式本身的真值必然为 T
 - » 换言之, 没有任何 wff 能够与 $\neg \mathbf{A}$ 逻辑等价
2. 利用归纳法对以上观察作出证明:
 - » 设 α 仅拥有一个命题词 $\mathbf{A}$ 且只含 $\{\wedge, \rightarrow\}$ 作为联词
 - » 证明 $\mathbf{A} \models \alpha$ (即 $B_{\alpha}^1(T) = T$ 恒成立)



证明

$$\Gamma \vdash \alpha$$



两种证明方式

- › 语义证明 (semantics) :
 - » 命题的“真”
 - » 直接讨论 wff 的可满足性、逻辑有效性、蕴涵关系、语义等价性等
- › 推导 (derivation) :
 - » 提供一种纯句法的方式 (a pure syntactic method) 来构建 wff 间的蕴涵关系与逻辑有效性

自然演绎 (NATURAL DEDUCTION)



$$\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

1.	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	Assumption
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	$\wedge e_1$ I
3.	α	Assumption
4.	β	$\rightarrow e$ 1,2
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	$\wedge e_2$ I
6.	γ	$\rightarrow e$ 4,5
7.	$\alpha \rightarrow \gamma$	$\rightarrow i$ 3,6
8.	$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	$\rightarrow i$ 1,7



ND 的矢列演算 (SEQUENT CALCULUS)

也叫Gentzen式演算 (一种由逻辑学家Gerhard Gentzen在1930s发明的树型证明形式)

根岑的LK (der Logistische Kalkül)系统如下, 其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为主命题, Γ, Δ 为辅命题 (集) :

核心规则:

$$\frac{}{\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}} Ax \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma', \mathbf{A} \vdash \Delta'}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta, \Delta'} Cut$$

结构规则:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta} WR$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta} WL$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta} CR$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta} CL$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Delta'} XR$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta} XL$$



ND 的矢列演算 (SEQUENT CALCULUS)

推理规则:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta} \top R \qquad \frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp L \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \Delta} \wedge R \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \Delta} \wedge L \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta} \vee R \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta} \vee L \\[10pt] \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta} \neg R \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta} \neg L \\[10pt] \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta} \rightarrow R \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma', \mathbf{B} \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta, \Delta'} \rightarrow L \end{array}$$


$$\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$\frac{\frac{\frac{}{\alpha \vdash \alpha} Ax \quad \frac{\frac{\beta \vdash \beta}{\beta, (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \gamma} Ax \quad \frac{\gamma \vdash \gamma}{\beta, (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \gamma} Ax}{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta), (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \gamma} \rightarrow L}{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \gamma} \wedge L}{(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \vdash (\alpha \rightarrow \gamma)} \rightarrow R}{\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)} \rightarrow R$$



公理系统推导 (AXIOMATIC DERIVATION)

我们所希望的“推导”是由一系列语句构成，它们：

1. 要么来自于推导的**前提** (premises)
2. 要么是**公理** (axioms)
3. 要么可从一些逻辑有效的**演绎**中得到



公理系统推导 (AXIOMATIC DERIVATION)

定义 I.19 (*derivation*) :

若 Γ 是一个 wff 集合, 那么 Γ 中的一个推导是一个 wff 有穷序列 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, 对任意 $i \leq n$ 有下面三者之一成立:

1. $\alpha_i \in \Gamma$
2. α_i 是一条公理
3. α_i 根据推理规则从某些 α_j (及 α_k) 得到, 其中 $j < i$ (且 $k < i$)
 - » 推理规则 (*rule of inference*) 给出了推理步骤正确性的充分条件



一些 NAÏVE 的推理规则

1. 若 $\alpha \in \Gamma$, 那么 α 正确的推导步骤
2. 若 α 是公理, 那么 α 是正确的推导步骤
3. 若 $\vdash \alpha$, 那么 α 是正确的推导步骤
4.



不那么 NAÏVE 的推理规则

- I. 若 $\beta \rightarrow \alpha$ 和 β 同时出现在推导的**前段**，那么 β 也是正确的
 - » 注：推导（derivation）也是一个序列，所以可以定义“段”、“前段”和“后段”
2. I 就足够了



可证 ($\vdash$)

定义 1.20 (可证的, *provable/derivable*) :

若从 Γ 出发, 存在一个由 wff α 结束的推导, 则称 α 是可由 Γ 推出的/由 Γ 可证的 (derivable from Γ), 记为

$$\Gamma \vdash \alpha$$

定义 1.21 (定理, *theorem*) :

若一个 wff α 从空集出发可证, 那么我们称它是一个定理, 记为

$$\vdash \alpha$$



定义1.22 (命题逻辑公理, *Axioms for Propositional Connectives*) :

1. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
3. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
4. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
5. $\alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$
6. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
7. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
8. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha)$
10. $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
11. $\top$
12. $\perp \rightarrow \alpha$
13. $(\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \neg \alpha$
14. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$



定义 1.23 (MP 规则/分离规则, *Modus ponens*) :
若推导中已有 $\beta \rightarrow \alpha$ 和 β , 那么 α 也是正确的, 即:

$$\beta, (\beta \rightarrow \alpha) \vdash \alpha$$



一个例子

试用命题逻辑公理证明：

$$\vdash (\neg\delta \vee \varphi) \rightarrow (\delta \rightarrow \varphi)$$

证明概要：

I. 观察到它与公理 I.22.6 ($(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$) 的最后部分具有相似形式：

» 替换 (*substitute*) $\theta = [\neg\delta/\alpha, \varphi/\beta, (\delta \rightarrow \varphi)/\gamma]$

2. 根据以上观察构造

$$(\neg\delta \rightarrow (\delta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\delta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\neg\delta \vee \varphi) \rightarrow (\delta \rightarrow \varphi)))$$

3. 再次找到对应公理，运用两次 MP 规则即可



第二个例子

试用命题逻辑公理证明：

$$\vdash \delta \rightarrow \delta$$

证明概要：

1. 观察到它与公理 I.22.7 ($(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$) 的最后部分具有相似形式：
 - » 替换 (*substitute*) $\theta = [\delta/\alpha, \delta/\beta]$ 得到要证明的 wff $\delta \rightarrow (\delta \rightarrow \delta)$
2. 然而，我们并没有 $\vdash \delta$ 来令我们使用 MP，**此路不通**。所以要采取一些别的策略
3. 另一个只包含 $\rightarrow$ 连词的公理是 I.22.8: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ ，同样注意最后一部分
 - » 进行替换 $\theta = [\delta/\alpha, \delta/\gamma]$ 得到

$$(\delta \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\delta \rightarrow \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow \delta))$$

4. 其中 $(\delta \rightarrow (\beta \rightarrow \delta))$ 已经是公理，而且**无论我们将 β 替换为什么都可以**
 - » 最后我们只要考虑让 $(\delta \rightarrow \beta)$ 可证：替换 $\theta' = [(\delta \rightarrow \delta)/\beta]$ ，即可满足公理 I.22.7



证明第二个例子的正式写法

试用命题逻辑公理证明：

$$\vdash \delta \rightarrow \delta$$

证明：

1. $\delta \rightarrow ((\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \delta)$ Ax 1.22.7
2. $(\delta \rightarrow ((\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \delta)) \rightarrow$
 $((\delta \rightarrow (\delta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\delta \rightarrow \delta))$ Ax 1.22.8
3. $(\delta \rightarrow (\delta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\delta \rightarrow \delta)$ 1, 2 MP
4. $\delta \rightarrow (\delta \rightarrow \delta)$ Ax 1.22.7
5. $\delta \rightarrow \delta$ 3, 4 MP

Q.E.D.

$$\vdash \delta \rightarrow \delta$$

8 . 17



第三个例子

试用命题逻辑公理证明亚里士多德的三段论：

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

证明：

- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | Hyp. |
| 2. | $\beta \rightarrow \gamma$ | Hyp. |
| 3. | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ | Ax 1.22.7 |
| 4. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ | 2, 3 MP |
| 5. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | Ax 1.22.8 |
| 6. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | 4, 5 MP |
| 7. | $\alpha \rightarrow \gamma$ | 1, 6 MP |

Q.E.D.



更多的命题逻辑公理/定理/重言式

随着推理的进行，我们可以不断扩充定理集合：

1. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
2. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$
3. (无穷多个)
4. *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*



演绎定理

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$



$\vdash$ 的性质

根据上面对推理的定义，我们可断言 $\vdash$ 的几个性质（显然成立）：

- （自反性, *reflexivity*）若 $\alpha \in \Gamma$ ，那么有 $\Gamma \vdash \alpha$
- （单调性, *monotonicity*）若 $\Gamma \vdash \alpha$ ，那么有 $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$
- （传递性, *transitivity*）若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\alpha \vdash \beta$ ，那么 $\Gamma \vdash \beta$

此外，我们可以得到另一个简单的结论（“meta”版的MP规则）：

引理 1.24：

若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ ，那么 $\Gamma \vdash \beta$



演绎定理 (DEDUCTION THEOREM)

定理 1.25 (演绎定理) :

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

演绎定理的证明:

- > $\Leftarrow$: 根据 $\vdash$ 的单调性, 若 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, 则 $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$; 根据自反性有 $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$; 根据引理 1.24 可得 $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$
- > $\Rightarrow$: 对 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 到 β 的证明长度施归纳
 - » 奠基: 若证明长度为一, 要么 β 是公理/重言式, 要么 $\beta \in \Gamma$
 - » 若 $\beta \in \Gamma$, 那么显然有 $\Gamma \vdash \beta$; 同时根据公理 1.22.7 有 $\Gamma \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ 。因此, 根据引理 1.24 可得 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 - » 若 $\beta \notin \Gamma$, 要么 $\beta = \alpha$, 此时 $\alpha \rightarrow \alpha$ 为定理 (前例已证); 要么 β 是公理/重言式。两种情况下都有 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$



演绎定理 (DEDUCTION THEOREM)

演绎定理的证明:

> $\Rightarrow$: 对 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 到 β 的证明长度施归纳

» 归纳:

» **归纳假设**: 关于长度小于 n 的演绎定理成立

» 假设存在一个从 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 到 β 的长度为 n 的证明, 且 β 是由 MP 规则推出 (否则根据证明定义, 有 $\beta \in \Gamma$ 、 $\beta = \alpha$ 或 $\vdash \beta$ 成立)

» 那么从 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 到 β 的证明前段中必然存在 $\gamma \rightarrow \beta$ 以及 γ , 且它们的证明长度均小于 n 。因此有

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$$

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

» 根据公理 I.22.8 可知

$$\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$$

» 结合上述关于 γ 的命题, 连续应用两次引理 I.24 即可证 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ 。

Q.E.D.



命题逻辑公理系统的可靠性

$$\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \models \alpha$$



可靠性 (SOUNDNESS)

一个“可靠”的系统，例如希尔伯特提出的公理系统，必须不能推出任何不成立的结论。可靠性 (Soundness) 是对推导系统的安全性保证，它必须有：

1. 任何可从空集推导出的 α 都是有效的 (valid)
2. 若 α 是可由某些 Γ 推导得出，那它必须是其逻辑结论 (consequence)
3. 若一个 wff 集是不一致的，那么它一定是不可满足的

如果不满足这三点，这个推导系统必然会推出多余的、且不必要的结论

命题 I.26:

定义 I.2.2 中的所有命题逻辑公理均为重言式



命题逻辑的可靠性

定理 I.27 (命题逻辑的可靠性, *soundness*) :

若 $\Gamma \vdash \alpha$, 那么 $\Gamma \models \alpha$

证明概要:

I. 对 $\Gamma \vdash \alpha$ 的证明长度 n 施归纳

» $n = 1$ 时 α 来自公理或 Γ , 因此若存在 $\bar{v}$ 令 $\bar{v} \models \Gamma$, 必然有 $\bar{v}(\alpha) = T$

2. 归纳假设: 证明长度为 $n < k$ 时可靠性成立, 只需证 $n = k$ 时成立

» 若 $\Gamma \vdash \alpha$ 的证明长度为 k , 且由 MP 规则推出 (否则 α 证明长度小于 k , 显然有可靠性), 那么证明序列的前 $k - 1$ 个 wff 中必然存在 $\beta \rightarrow \alpha$ 且 β

» 利用语义演绎定理 (定理 I.15) 的一个形式: $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ 即可得证



命题逻辑公理系统的完备（完全）性

$$\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$$



命题逻辑的完备性 (COMPLETENESS)

定理 I.28 (命题逻辑的完备性, *completeness*) :

若 $\Gamma \models \alpha$, 那么 $\Gamma \vdash \alpha$

1. **意义:** 一切为“真”的命题 (定理), 都可以通过公理系统推导 (证明) 得出
2. **难点:** 这是一条关于 $\vdash$ 的命题。然而对所有符合条件的 $\langle \Gamma, \alpha \rangle$, $\Gamma \models \alpha$ 几乎给不了我们任何信息来帮助我们构造一个由 Γ 到 α 的推导
3. **窍门:** 用 $\Gamma \not\models \alpha$ 推出 $\Gamma \not\vdash \alpha$
 - » $\Gamma \not\models \alpha$ 意味着 $\Gamma \vdash \neg \alpha$ (why? 因为命题逻辑是**可判定的**), 进而意味着 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 是**不一致的**

回忆: 一个推演是有效的, 当且仅当它的前提和其结论的否定是**不一致的**



一致性

定义 1.29（一致性，*consistency*）：

一个 wff 集合 Γ 是**一致的**（*consistent*），当且仅当 $\Gamma \not\vdash \perp$

一些关于一致性的的要点：

- › 一致性是关于“证明/推导”（ $\vdash$ ）的性质，**不是关于语义（ $\models$ ）的性质！**
- › Γ 一致意味着 $\Gamma \vdash \alpha$ 与 $\Gamma \vdash \neg\alpha$ 不能同时成立
- › 若 Γ 是不一致的（*inconsistent*），那么对任意 wff α 有 $\Gamma \vdash \alpha$
- › 若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \cup \{\alpha\}$ 是不一致的，那么 Γ 本身也不一致



一致性

定理 1.30:

$\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ 不一致

证明:

1. ($\Rightarrow$) 假设 $\Gamma \vdash \alpha$

- » 根据 $\vdash$ 的单调性有 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$; 根据 $\vdash$ 的自反性有 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$
- » 根据公理 1.22.10 有 $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$
- » 连续运用两次引理 1.24, 即可得 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \perp$ (不一致的定义)

2. ($\Leftarrow$) 假设 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \perp$

- » 根据演绎定理有 $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \perp$;
- » 根据公理 1.22.13 有 $\Gamma \vdash (\neg\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\neg\alpha$, 因此根据引理 1.24 有 $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$
- » 公理 1.22.14 告诉我们 $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$, 根据引理 1.24 有 $\Gamma \vdash \alpha$

Q.E.D.



一致性、可满足性与完备性

引理 I.3I [Hao et al., pp.50]: 下列命题等价:

- I. 若 Γ 一致, 则 Γ 可满足
2. 若 $\Gamma \models \alpha$, 则 $\Gamma \vdash \alpha$

证明:

- I. $(1 \Rightarrow 2)$ 反证法。假设 I 和 2 的前提成立, 且 $\Gamma \not\models \alpha$
 - » 根据定理 I.30 有 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ 是一致的, 因此它也可满足。设存在一个真值指派 v 满足它
 - » 一方面, 根据 $\Gamma \models \alpha$ 可知所有满足 Γ 的 $\bar{v}$ 均满足 α
 - » 另一方面, 存在一个满足 Γ 的 $\bar{v}$ 满足 $\bar{v}(\neg\alpha) = T$, 亦即 $\bar{v}(\alpha) = F$ 。矛盾
2. $(2 \Rightarrow 1)$ 反证法。假设 2 和 I 的前提成立, 且 Γ 不可满足
 - » 由于 Γ 是一致的, 因此 $\Gamma \not\vdash \perp$
 - » 然而, 若 Γ 不可满足, 则对任意 wff α 有 $\Gamma \models \alpha$
 - » 那么根据 2 有 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \neg\alpha$ 。矛盾

Q.E.D.



证明完备性的思路

至此，我们或许能够利用关于 Γ 的一致性来构造一个真值指派 v ，以使 $\bar{v}$ 能够满足 Γ 中的任意wff。这种 v 也被称为 Γ 的模型（model）

1. 如果 Γ 只有命题词 $\mathbf{A}_i$ ，显然存在一个模型满足它
2. 如果 Γ 只有原子公式（atomic wff），即还有一些命题词的否定 $\neg\mathbf{A}_i$ ，也显然存在一个模型满足它，so far so good
3. 如果 Γ 存在一些更复杂的公式呢？比如 $\alpha \wedge \beta$ ？那么 Γ 的模型也是 $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ 的模型；如果它包含 $\alpha \vee \beta$ ，那么它的模型也满足 α 和 β 中的至少一个
4. 启示：可以给 Γ 不断增加原子wff，同时保证其一致
 1. 对于一个原子公式 $\alpha = \mathbf{A}_i$ ，要么增加 α ，要么增加 $\neg\alpha$ （extending）
 2. 若 $\alpha \wedge \beta$ 在里面，.....；若 $\alpha \vee \beta$ 在里面，.....（consistent set）
 3. 不断增加原子公式直到无法再增加可得 Γ^* 。它所有原子wff的模型就是 Γ 的模型，即 $\bar{v}(\Gamma^*) \models \Gamma$ （complete consistent set）



命题的完备（完全）集

定义 I.33（完全集，*complete set*）：

一个 wff 集合 Γ 被称为**完全集**当且仅当对任意 wff α ，要么 $\alpha \in \Gamma$ ，要么 $\neg\alpha \in \Gamma$

定理 I.34：

如果 Γ 是完全且一致的，那么：

1. 若 $\Gamma \vdash \alpha$ ，则 $\alpha \in \Gamma$
2. $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ 当且仅当要么 $\alpha \notin \Gamma$ ，要么 $\beta \in \Gamma$



引理 1.35 [Hao et al., pp.50]:

每一个一致的 wff 集合 Γ 都可被扩张为一个完全且一致的集合（极大一致集） Γ^*

证明概要：

- › （构造）设 Γ 是一致的，令 $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ 是（命题逻辑）语言中所有 wff 的一个枚举。定义 $\Gamma_o = \Gamma$ ，且

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{if } \Gamma \cup \{\alpha_n\} \text{ is consistent;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$ ，显然它是完全的

- › 【断言 I】每一个 Γ_n 都是一致的：根据定义可知 Γ_o 一致；设 Γ_n 一致。若 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ ，则说明后者是一致的，否则 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ 必然一致。不然会有 $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ 与 $\Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ 同时不一致，与 Γ_n 一致矛盾（why?）



引理 I.35 [Hao et al., pp.50]:

每一个一致的 wff 集合 Γ 都可被扩张为一个完全且一致的集合（极大一致集） Γ^*

（续）证明概要：

- 【断言 2】对所有的 n 和 $i < n$ 有 $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ ：对 n 施归纳。当 $n = 0$ 时不存在 $i < n$ ，断言自然成立；若断言对 n 成立，那么根据其构造方式有 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ 或者 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ ，因此 $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ 。而对 $i < n$ 根据归纳假设有 $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ ，根据 $\subseteq$ 的传递性可知 $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$
- 由以上可知， Γ^* 的任意一个有穷子集都是某一个 Γ_n （有穷）的子集，而所有 Γ_n 是一致的，意味着 Γ^* 的所有有穷子集都是一致的，因此 Γ^* 一致 Q.E.D.



构造 Γ^* 的模型

定义 I.36:

令 Γ^* 是一个完备一致的 wff 集合, 对其中的每个原子命题 A 令

$$v(\Gamma^*) = \begin{cases} T & \text{if } A \in \Gamma^*; \\ F & \text{if } A \notin \Gamma^* \end{cases}$$

引理 I.37 [Hao et al., pp.50]:

$v(\Gamma^*)$ 是 Γ^* 的模型 (*model*), 即 $v(\Gamma^*) \models \alpha$ 当且仅当 $\alpha \in \Gamma^*$

证明概要: 对 α 做结构归纳。

Q.E.D.



定理 I.28' (命题逻辑的完备性, *completeness*) :

若 Γ 是一致的, 那么 Γ 可满足

证明:

若 Γ 是可满足的, 根据 Lindenbaum 引理, 存在一个完备一致集 $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ 。根据引理 I.37, Γ^* 存在一个模型 $v(\Gamma^*)$, 且对任意 $\alpha \in \Gamma^*$ 有 $v(\Gamma^*) \models \alpha$ 。

综上, Γ 是可满足的。

Q.E.D.



小结



命题逻辑的语法

- › 命题逻辑表达式
- › 命题逻辑合式公式
 - » 归纳定义
- › 命题逻辑公式的结构
 - » 结构归纳证明
 - » 唯一可读性定理



命题逻辑的语义

- › 赋值函数与赋值的扩张
- › 语义蕴涵 ($\models$)
- › 联词的语义
 - » 联词的完全组



命题逻辑的证明

- › 自然演绎
 - » 树状证明, 矢列
- › 公理系统
 - » Hilbert 式证明
- › 演绎定理



命题逻辑的可靠性和完备性

- › 命题逻辑的可靠性
- › 命题逻辑的完备性
 - » 一致性
 - » 紧致性
 - » 可满足性
 - » Lindenbaum 引理