数理逻辑

01 - 命题逻辑简介

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

2025年 - 春季

https://daiwz.net

语法

前情提要

- “我可以怀疑物理世界是否存在。我甚至可以怀疑我的身体是否真的存在。但我不能怀疑我自己是否存在。所以，我不是我的身体。”
- 原文：‘I can doubt that the physical world exists. I can even doubt whether my body really exists. I cannot doubt that I myself exist. So I am not my body.’
- 这种推理似乎得到了笛卡尔的《沉思录》的支持（尽管我们可以争论归属）。这个论证有效吗？

前情提要

回顾：根据形式化的一些基本假设，若能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题"并非 A"和"A 并且 B"，甚至"A 蕴涵 B"的真假。

- "命题"是陈述句，非真即假
  - 分析命题 vs 综合命题
- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如："并非"、"并且"、"或者"、"蕴含"……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑中的符号

符号	中文名	意义
(	左括号	标点
)	右括号	标点
$\neg$	非运算符	并非
$\wedge$	合取运算符	与
$\vee$	析取运算符	或
$\rightarrow$	蕴涵符	若...则...
$\leftrightarrow$	双蕴涵符	当且仅当
$\mathbf{A}_1$	第1个命题符	
$\mathbf{A}_2$	第2个命题符	
$\ldots$		
$\mathbf{A}_n$	第n个命题符	
$\ldots$	（可数无穷个）	

命题逻辑中的符号

1. 我们使用一些不属于“命题逻辑符号”中的符号来帮助我们进行书写和理解，这些符号被成为元语言（meta-language）
2. “符号”可构成序列
   - 简写：$\langle (, \neg, \mathbf{A}_1,) \rangle = (\neg \mathbf{A}_1)$
   - 表达式的长度是其中符号出现的数目
   - 长度为0的表达式称为空表达式，用记号ϕ表示
   - 这里的“$\langle$”、“$\rangle$”和“ϕ”都是元语言中的符号（vs“对象语言”）
3. 命题逻辑语言中：任意一个符号都不是由其他符号构成的有穷序列
   - 例如：$\mathbf{A}_3 \neq \leftrightarrow$，$\mathbf{A}_3 \neq \langle \neg, \mathbf{A}_4, (\rangle$
   - 这意味着若

     $$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$$

     那么必有$m = n$且$a_i = b_i$ [Enderton, pp.4]
     - 这里的变元符号a_i、b_j同样属于元语言

表达式（Expression）

定义 1.1： 表达式（*expression*）是有穷个符号构成的序列。

例如:

- $(\neg\mathbf{A}_1)$，$((\mathbf{A}_2$
- 若α和β是表达式，则它们的拼接也是表达式，例如:

$$\alpha = (\neg\mathbf{A}_1)$$
$$\beta = (\mathbf{A}_2)$$

则$(\alpha \to \beta)$是

$$((\neg\mathbf{A}_1) \to \mathbf{A}_2)$$

合式公式（Well-Formed Formulas）

定义 1.2（*wff*）：

1. 每个命题符号 $\mathbf{A}_i$ 都是合式公式（原子公式，atomic formula）
2. 若α，β是合式公式，那么$(\neg\alpha)$和$(\alpha\square\beta)$也是合式公式。其中$\square$是$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$中的一个
3. 除此以外都不是合式公式。

也可以用 Bacus-Naur Form 定义命题为

$$\varphi ::= \mathbf{A}_i \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid (\varphi_1 \vee \varphi_2) \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \mid (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$$

WFF 的构造序列

定义 1.3（公式构造运算，*formula-building operations*）：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\neg}(\alpha) &= (\neg\alpha) \\
\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha, \beta) &= (\alpha \wedge \beta) \\
\mathcal{E}_{\vee}(\alpha, \beta) &= (\alpha \vee \beta) \\
\mathcal{E}_{\to}(\alpha, \beta) &= (\alpha \to \beta) \\
\mathcal{E}_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta) &= (\alpha \leftrightarrow \beta)
\end{aligned}
$$

WFF 的构造序列

定义 1.4（构造序列，*construction sequence*）：

有穷序列$\langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \rangle$被称为一个命题公式的构造序列，当且仅当对任意$i \leq n$满足以下条件之一：

1. ϵ_i是一个命题符号
2. $\epsilon_i = \mathcal{E}_\neg(\epsilon_j)$，$j < i$
3. $\epsilon_i = \mathcal{E}_\square(\epsilon_j, \epsilon_k)$，$j < i$且$k < i$

其中$\square$是$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$中的一个

WFF 的构造序列

$$((\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_{10}) \to ((\neg \mathbf{A}_3) \vee (\mathbf{A}_8 \leftrightarrow \mathbf{A}_3)))$$

结构递归

递归定义

- **自上而下：**

$$S^* = \bigcap \{S \mid S \text{ 包含所有命题符号且关于五种公式构造运算封闭}\}$$

- **自下而上：**
  - $S_0 = \{\mathbf{A}_1, \ldots\}$
  - $S_i = \{\neg\alpha \mid \alpha \in S_{i-1}\} \cup \{\alpha \square \beta \mid \alpha \in S_{i-1}, \beta \in S_{i-1}, \square = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup S_{i-1}$
  - $S_* = \bigcup_n S_n$

递归定义

定理 1.5 [Enderton, pp.37]：

$$S^* = S_*$$

记法：令 $S = S^* = S_*$

- 自下而上定义的好处在于展现了每个wff的构造过程
- 自上而下的定义告诉我们S是一个闭包（closure），因此可以运用归纳原理（Induction Principle）进行证明和理解 [Enderton, pp.37]

归纳原理

定理 1.6（关于命题逻辑wff的归纳原理）[Hao, Yang and Yang, pp.28]：

令$P(\alpha)$为一个关于wff的性质。假设：

1. 对所有命题符号$\mathbf{A}_i$，性质$P(\mathbf{A}_i)$成立
2. 对所有的wff α和β，若$P(\alpha)$和$P(\beta)$成立，则$P(\neg\alpha)$和$P((\alpha\Box\beta))$也成立，其中$\Box$是$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$中的任意一个

那么对于所有的wff α有性质$P(\alpha)$成立。

证明：依结构归纳/强数学归纳法，显然。

归纳原理

例 1.7：证明 S 是无穷可数集，即 $|S| = |\mathbb{N}|$

证明概要：

1. 命题符号的个数为 $|\mathbb{N}|$
2. 任意wff均由有限步生成
3. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$（显然！）

括号引理

引理1.8：

1. 每个wff中左右括号的数目相同
2. 每个wff的非空真初始段中左括号多于右括号。因此，wff的真前段一定不是wff

1.8.a 证明概要[Enderton, pp.19]：

记“括号平衡”为性质P

1. Base： 对于原子公式$\alpha = \mathbf{A}_i$显然有$P(\alpha)$成立
2. Induction step：
   - Hypothesis：设$P(\alpha)$和$P(\beta)$均成立
   - $(\neg\alpha)$和$(\alpha\square\beta)$仅添加最外侧括号，所以$P((\neg\alpha))$与$P((\alpha\square\beta))$成立

Q.E.D.

括号引理

1.8.b 证明概要[Enderton, pp.30]：

记“左括号比右括号多”为性质 P

1. Base： 对于原子公式 $\alpha = \mathbf{A}_i$ 显然有 $P(\alpha)$ 成立（无真初始段）
2. Induction step：
   - Hypothesis：设 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 均成立
   - 以 $\mathcal{E}_\wedge$ 为例，列举其所有可能真初始段，易知均满足性质 P
   - 类似可证明其他构造运算下的情况。Q.E.D.

唯一可读性

可读性

魯哀公問於孔子曰：「樂正夔一足，信乎？」

孔子曰：「昔者舜欲以樂傳教於天下，乃令重黎舉夔於草莽之中而進之，舜以為樂正。夔於是正六律，和五聲，以通八風，而天下大服。重黎又欲益求人，舜曰：『夫樂，天地之精也，得失之節也，故唯聖人為能和。樂之本也。夔能和之，以平天下。若夔者一而足矣。』故曰夔一足，非一足也。」（《呂氏春秋》，慎行論・察傳）

能否省略WFF中的括号?

$$\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3$$

Lean 4

$$A \to B \to C$$

$$A \to (B \to C)$$

$$(A \wedge B) \to C$$

$$A \times B \to C$$

公式的结构

定理1.9：

wff恰好具有以下六种形式之一：

1. 原子公式，即命题词$\mathbf{A}_i$
2. $(\neg\alpha)$
3. $(\alpha \wedge \beta)$
4. $(\alpha \vee \beta)$
5. $(\alpha \to \beta)$
6. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

不仅如此，在情形2~6中，公式α和β还有二元联词$\square$都是**唯一**的。

公式的结构

例 1.10：公式

$$\gamma = (((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_8 \to \mathbf{A}_{10})) \to (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_{10}))$$

具有哪种形式?

1. $\gamma = \alpha$
2. $\gamma = (\neg \alpha)$
3. $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$
4. $\gamma = (\alpha \vee \beta)$
5. $\gamma = (\alpha \to \beta)$
6. $\gamma = (\alpha \leftrightarrow \beta)$

算法 1.10：解析算法 [Enderton, pp.31]

- **输入**：命题逻辑 wff φ
- **输出**：φ 的解析树 T

1. 令 $T = \varphi$（根节点）
2. 若所有的叶子均为原子公式，则终止并输出 T；否则对 T 进行遍历，直到找到一个非原子公式的叶子节点 N，跳转至 3
3. 表达式 N 的第一个符号必须为 (。若第二个符号是 $\neg$，跳转至 5；否则跳转至 4
4. 从 (开始，从左至右扫描得到一个括号平衡的 α
   - α 的下一个符号必须为 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 之中的一个
   - 符号序列的剩余段为 $\beta)$，它必须包含一个括号平衡的 β 与)
   - 在 N 上分别创建左右子树 α 与 β，跳转至 2
5. 表达式 N 的前两个符号为 ($\neg$
   - 符号序列的剩余段为 $\beta)$，它必须包含一个括号平衡的 β 与)
   - 在 N 上分别创建一颗子树 β，跳转至 2

唯一可读性定理 [Enderton, pp.40]

定理 1.11（Unique Readability Theorem）：

对于五种公式构造运算在 S（即所有 wff）上的限制 $\mathcal{E}_{\neg}|_S$ 和 $\mathcal{E}_{\square}|_S$：

1. 值域（range）互不相交
2. 是一一映射

这意味着 S 是由命题集合 $\{\mathbf{A}_1, \ldots\}$ 通过五种构造算子自由生成的。

1.11 证明概要 [Enderton, pp.40]：

1. 先证明算子是一一的：
   - 例如：若 $\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta) = (\gamma \wedge \delta) = \mathcal{E}_{\wedge}(\gamma \wedge \delta)$，则必有 $\alpha = \gamma$ 且 $\beta = \delta$，否则与定理 1.8. b 矛盾
2. 再证明值域不相交（算子定义）
   - 例如：若 $\alpha \wedge \beta = \gamma \to \delta$，则有 $\alpha = \gamma$、$\beta = \delta$ 且 $\wedge = \to$，

WFF 的简写

括号太多，不方便书写和阅读

- 通常省略最外层的括号

$$(((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3))$$

  可写成

$$((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

- 辅助符号引入方括号、大括号

$$((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)) \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

  可写成

$$[(\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_3)] \rightarrow (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

WFF 的简写

- 约定联结符号的优先级，例如

$$\langle \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow \rangle$$

  - $$((\neg \mathbf{A}_1) \vee (\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_3)) \to (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

    可写成

    $$\neg \mathbf{A}_1 \vee (\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_3) \to (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3)$$

  - $$\mathbf{A}_1 \vee (((\neg \mathbf{A}_1) \wedge \mathbf{A}_3) \vee (\neg(\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)))$$

    可写成

    $$\mathbf{A}_1 \vee (\neg \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_3 \vee \neg(\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3))$$

语义

逻辑系统的两面

- **语法**：符号表达式的形式结构
- **语义**：符号和符号表达式的涵义（给符号以某种解释）
  - 关于“真”
  - 只与话题无关词汇相关

真值指派

定义 1.12（truth assignment）：

对于命题符号集合 S，一个真值指派 v 是一个函数

$$v : S \to \{F, T\}$$

联结词定义的布尔函数

令真值集$\mathcal{B} = \{T, F\}$,

- 联结词$\neg$被解释为一元布尔函数$B_{\neg} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
- 联结词$\square$被解释为二元布尔函数$B_{\square} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
  - 其中$\square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

v_1	v_2	$B_{\neg}(v_1)$	$B_{\vee}(v_1, v_2)$	$B_{\wedge}(v_1, v_2)$	$B_{\to}(v_1, v_2)$	$B_{\leftrightarrow}(v_1, v_2)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

命题的语义

定义 1.12’（truth assignment, extended）：

1. v是一个真值指派（赋值）指它是一个函数$v : S \to \{F, T\}$，从而对于任何命题符号$\mathbf{A}_i \in S$，$v(\mathbf{A}_i)$为T或F
2. 对于任何真值指派v，定义$\bar{v} : \bar{S} \to \{F, T\}$如下
   - » $\bar{v}(\mathbf{A}_i) = v(\mathbf{A}_i), i \in \mathbb{N}$
   - » $\bar{v}(\neg\alpha) = B_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$
   - » $\bar{v}(\alpha \Box \beta) = B_{\Box}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)), \Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

WFF 的语义

$$(\mathbf{A}_2 \to (\mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \to \mathbf{A}_6)$$

其中

- $v(\mathbf{A}_1) = T$
- $v(\mathbf{A}_2) = T$
- $v(\mathbf{A}_6) = F$

wff 的语义是否和可读性一样有唯一性?
换言之，$\bar{v}$ 是不是一个合法的函数?
（归纳定理*） [Enderton, 39 & 41]

Lean 4 Example

证明：设$v, w : \texttt{String} \to \texttt{Bool}$是两个赋值函数。如果对任意原子$a$都有

$$v(a) = w(a),$$

则对于任意公式ϕ，都有

$$v(\phi) = w(\phi)$$

蕴涵

$$\Gamma \vDash \alpha$$

可满足性

定义1.13（satisfiability）：

设$\alpha \in \bar{S}$，v为S上的一个真值指派：

1. v满足α，记为$v \vDash \alpha$，指$\bar{v}(\alpha) = T$
   - α是可满足的，指存在一种真值指派v使得$v \vDash \alpha$
2. v满足一个命题公式集合$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，记为$v \vDash \Sigma$，指对任意$\alpha_i \in \Sigma$，有$v \vDash \alpha_i$
   - Σ是可满足的，指存在一种真值指派v使得$v \vDash \Sigma$

- 若$v \nvDash \alpha$，则$v \vDash \neg\alpha$
- Γ的可满足性蕴涵Γ中所有公式的可满足性，反之不一定成立

可满足性问题

- 给定一个**命题逻辑**wff α，问是否存在一个真值指派v，使得$v \vDash \alpha$?
  - 此赋值v也被称为问题的一个解（solution）
- 命题逻辑公式的可满足性问题（也称**布尔可满足性问题**）
  - 第一个被证明的NP完全问题（NP-Complete, NPC）
    - 即它是NP问题且所有NP问题可以多项式时间归约到它
  - 非确定性算法：将问题分解为猜测和验证两个部分
    - 验证一个赋值是公式的一个解很容易（多项式时间，即NP: Non-deterministic Polynomial Time）
    - 找到一个解很困难
  - 已知$P \subseteq NP$，但有没有$P = NP$? （千禧问题之一）

重言蕴涵、语义蕴涵、语义后承、逻辑推论……

定义1.14（tautologically implies, entails）：

Σ重言蕴涵τ（记为$\Sigma \vDash \tau$）当且仅当所有满足Σ的真值指派均满足τ

1. 当$\Sigma = \emptyset$，记为$\emptyset \vDash \tau$或$\vDash \tau$
   - 意味着任意真值指派均满足τ，我们称τ为重言式或永真式（tautology）
2. 矛盾式重言蕴涵任意公式（vacuous truth），例如
   - $\{\mathbf{A}, \neg\mathbf{A}\} \vDash \mathbf{B}$
3. 逻辑等价性：若$\alpha \vDash \beta$且$\beta \vDash \alpha$，我们记为$\alpha \vDash\dashv \beta$或者$\alpha \simeq \beta$
   - 容易证明，$\simeq$是一个等价关系
   - 等价wff可以做等值替换，例如*de Morgan laws*

真值表

例：$\{\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}\} \vDash \mathbf{B}$

语义与语法间的关系

定理 1.15（语义的演绎定理，*Semantic Deduction Theorem*）：

1. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ 当且仅当 $\vDash \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$
2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ 当且仅当 $\vDash \alpha_1 \rightarrow (\ldots(\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))\ldots)$

1.15.2 证明概要：

1. $\Rightarrow$（反证法）：假设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ 成立时，存在 v 使得 $\bar{v}(\alpha_1 \rightarrow (\ldots(\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))\ldots)) = F$
   - 蕴涵式赋值为假（$H_{\rightarrow}$）当且仅当前件为真后件为假，可得 $\bar{v}(\alpha_1) = T$ 且 $\bar{v}(\ldots(\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))\ldots) = F \ldots$
2. $\Leftarrow$（反证法）：略

紧致性定理 [Enderton, pp.60]

紧致性定理（Compactness Theorem）：

一个wff集合是可满足的，当且仅当它的所有有穷子集（finite subset）可满足。

证明:

见[Enderton, pp.60]，类似的方法在soundness/completeness中会再次应用。

命题逻辑的语言够用吗?

WFF与布尔函数

- 假设α是一个至多含有命题符号$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$的wff
- 那么α就决定了一个n元布尔函数$B_\alpha^n : \{T, F\}^n \to \{T, F\}$

$v(\mathbf{A}_1), \dots, v(\mathbf{A}_n)$	$X_1, \dots, X_n$	$B_\alpha^n(X_1, \dots, X_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(\mathbf{A}_1), \dots, v_1(\mathbf{A}_n)$	$T, \dots, T$	$B_\alpha^n(T, \dots, T)$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$v_{2^n}(\mathbf{A}_1), \dots, v_{2^n}(\mathbf{A}_n)$	$F, \dots, F$	$B_\alpha^n(T, \dots, T)$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

由 WFF 实现的布尔函数 [Enderton, pp.46]

定义 1.16：

令α为至多包含命题符号$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$的wff。我们定义由$\alpha$实现（realised）的布尔函数$B^n_\alpha$（或忽略$n$记为$B_\alpha$），使得

$$B^n_\alpha(X_1, \ldots, X_n) = \bar{v}(\alpha)$$

其中$X_i = v(\mathbf{A}_i)$。

命题逻辑的语言够用吗?

命题逻辑的语法是否足够表达所有布尔函数?

命题联词

- 我们赋予二元联词$\rightarrow$的意义就是一个二元函数：
  - $B_{\rightarrow}:\{T,F\}^2\rightarrow\{T,F\}$
- 而赋予一元联词$\neg$的意义是一个一元函数：
  - $B_{\neg}:\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$
- 我们称这种以$\{T,F\}$（或其任意n维卡氏积）为定义域和值域的函数为布尔函数

命题联词

问题:

- 有多少种一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种n元联词?

命题联词

问题:

- 有多少种不同意义的一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种n元联词?

命题联词

问题:

- 有多少种一元布尔函数?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种n元联词?

命题联词的合成

X	Y	$B_\neg(X)$	$B_\vee(X,Y)$	$B_\top(X)$	$B_\downarrow(X,Y)$
T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F
T	F		T		F
F	F		F		T

则$B_\top(x) = B_\vee(B_\neg(x), x)$，而$B_\downarrow(x,y) = B_\neg(B_\vee(x,y))$

联词的完全组

- 一个由n个命题符号组成的wff也可以看作一个n元联结词
- **问题**：多少个 / 哪些命题联结词构成的集合就够用了？
- 也就是说，只用$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$五个联结词是否就可以实现任意n元布尔函数？

由布尔函数导出的 WFF [Enderton, pp.47]

定理 1.17：

对任意n元布尔函数$G : \{T, F\}^n \to \{T, F\}, n \geq 1$，都存在一个wff α使得$B_\alpha^n = G$，即使得α能够实现G。

由布尔函数导出的 WFF

例如，

X_1	X_2	X_3	$G(X_1, X_2, X_3)$
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

令

$$\begin{aligned}\alpha = &(\neg \mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3) \vee \\ &(\neg \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee \\ &(\mathbf{A}_1 \wedge \neg \mathbf{A}_2 \wedge \neg \mathbf{A}_3) \vee \\ &(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)\end{aligned}$$

检验：$G = B_\alpha^3$

由布尔函数导出的 WFF

1.17 证明概要[Enderton, pp.47]：

分情况讨论：

1. 常函数：例如恒为真（重言式）、恒为假（矛盾式）
2. 其他函数：将映射至T的$\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$列出来，构造类似上例中的公式$G$（Disjunctive Normal Form，DNF）
   » 证明满足G的真值指派恰好令B_α^n输出T
   » 不满足G的真值指派恰好令B_α^n输出F

联词的完全组

定义 1.18：

称一组联词（布尔函数）C是（功能）完全的（*complete*），如果任意n元布尔函数（$n \geq 1$）都可以由C中的布尔函数通过函数复合定义。

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是完全的（定理 1.17 证明中已经给出）
- $\{\neg, \wedge\}$是完全的，因为$B_\vee(X,Y) = B_\neg(B_\wedge(B_\neg(X), B_\neg(Y)))$

联词的完全组

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如$B_\neg$、$B_\wedge$或$B_\vee$
- 寻找，例如$B_\neg$的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备该性质
- 归纳证明这点

联词的完全组

例 [Enderton, pp.50]：

$\{\wedge, \to\}$不是一个功能完全的联词组。

证明概要：

1. 观察：若wff中只有这两个联词，且其中的命题的赋值均为T，则该公式本身的真值必然为T
   - 换言之，没有任何wff能够与$\neg\mathbf{A}$逻辑等价
2. 利用归纳法对以上观察作出证明：
   - 设α仅拥有一个命题词$\mathbf{A}$且只含$\{\wedge, \to\}$作为联词
   - 证明$\mathbf{A} \vDash \alpha$（即$B^1_\alpha(T) = T$恒成立）

证明

$$\Gamma \vdash \alpha$$

两种证明方式

- 语义证明（semantics）：
  - 命题的“真”
  - 直接讨论wff的可满足性、逻辑有效性、蕴涵关系、语义等价性等
- 推导（derivation）：
  - 提供一种纯句法的方式（a pure syntactic method）来构建wff间的蕴涵关系与逻辑有效性

自然演绎（NATURAL DEDUCTION）

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

1.	$(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)$	Assumption
2.	$\alpha \to \beta$	$\land e_1$ 1
3.	α	Assumption
4.	β	$\to$e 1,2
5.	$\beta \to \gamma$	$\land e_2$ 1
6.	γ	$\to$e 4,5
7.	$\alpha \to \gamma$	$\to$i 3,6
8.	$((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	$\to$i 1,7

ND的矢列演算（SEQUENT CALCULUS）

也叫Gentzen式演算（一种由逻辑学家Gerhard Gentzen在1930s发明的树型证明形式）

根岑的LK (der Logistische Kalkül)系统如下，其中$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为主命题，Γ, Δ为辅命题（集）：

核心规则:

$$\frac{}{\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}}\ Ax \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma', \mathbf{A} \vdash \Delta'}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta, \Delta'}\ Cut$$

结构规则:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ WR \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}\ WL \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}\ CR \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}\ CL$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Delta'}\ XR \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta}\ XL$$

ND的矢列演算（SEQUENT CALCULUS）

推理规则：

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top R \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \Delta}\ \wedge R \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \wedge L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta}\ \vee R \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta}\ \vee L$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta}\ \neg R \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta}\ \neg L$$

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \Delta}\ \to R \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma', \mathbf{B} \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{A} \to \mathbf{B} \vdash \Delta, \Delta'}\ \to L$$

ND的矢列演算（SEQUENT CALCULUS）

我们用Gentzen的LK系统来书写以下公式的证明:

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\,Ax
        \qquad
        \dfrac{
          \dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,Ax
          \qquad
          \dfrac{}{\gamma \vdash \gamma}\,Ax
        }{\beta, (\beta \to \gamma) \vdash \gamma}\,\to L
      }{\alpha, (\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma) \vdash \gamma}\,\to L
    }{\alpha, (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \vdash \gamma}\,\land L
  }{(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \vdash (\alpha \to \gamma)}\,\to R
}{\vdash ((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)}\,\to R
$$

公理系统推导（AXIOMATIC DERIVATION）

我们所希望的“推导”是由一系列语句构成，它们:

1. 要么来自于推导的前提（premises）
2. 要么是公理（axioms）
3. 要么可从一些逻辑有效的演绎中得到

公理系统推导（AXIOMATIC DERIVATION）

定义1.19（*derivation*）：

若Γ是一个wff集合，那么Γ中的一个推导是一个wff有穷序列$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$，对任意$i \leq n$有下面三者之一成立：

1. $\alpha_i \in \Gamma$
2. α_i是一条公理
3. α_i根据推理规则从某些α_j（及α_k）得到，其中$j < i$（且$k < i$）

   » 推理规则（*rule of inference*）给出了推理步骤正确性的充分条件

一些 NAÏVE 的推理规则

1. 若 $\alpha \in \Gamma$，那么 α 正确的推导步骤
2. 若 α 是公理，那么 α 是正确的推导步骤
3. 若 $\vDash \alpha$，那么 α 是正确的推导步骤
4. ……

不那么 naïve 的推理规则

1. 若$\beta \to \alpha$和β同时出现在推导的**前段**，那么β也是正确的
   - 注：推导（derivation）也是一个序列，所以可以定义“段”、“前段”和“后段”
2. 1就足够了

可证（$\vdash$）

定义1.20（可证的，*provable/derivable*）：

若从Γ出发，存在一个由 wff α结束的推导，则称α是可由Γ推出的/由Γ可证的（derivable from Γ），记为

$$\Gamma \vdash \alpha$$

定义1.21（定理，*theorem*）：

若一个 wff α从空集出发可证，那么我们称它是一个定理，记为

$$\vdash \alpha$$

命题逻辑中的公理

定义 1.22（命题逻辑公理，*Axioms for Propositional Connectives*）：

1. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
2. $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
3. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
4. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
5. $\alpha \to (\beta \vee \alpha)$
6. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
7. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
8. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
9. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$
10. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
11. $\top$
12. $\bot \to \alpha$
13. $(\alpha \to \bot) \to \neg\alpha$
14. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

推理规则

定义1.23（MP规则/分离规则，*Modus ponens*）：

若推导中已有$\beta \to \alpha$和β，那么α也是正确的，即:

$$\beta, (\beta \to \alpha) \vdash \alpha$$

一个例子

试**用命题逻辑公理**证明：

$$\vdash (\neg\delta \vee \varphi) \to (\delta \to \varphi)$$

证明概要：

1. 观察到它与公理1.22.6（$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$）的最后部分具有相似形式：
   - 替换（*substitute*）$\theta = [\neg\delta/\alpha, \varphi/\beta, (\delta \to \varphi)/\gamma]$
2. 根据以上观察构造

$$(\neg\delta \to (\delta \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\delta \to \varphi)) \to ((\neg\delta \vee \varphi) \to (\delta \to \varphi)))$$

3. 再次找到对应公理，运用两次MP规则即可

第二个例子

试**用命题逻辑公理**证明：

$$\vdash \delta \to \delta$$

证明概要：

1. 观察到它与公理1.22.7（$(\alpha \to (\beta \to \alpha))$）的最后部分具有相似形式：
   - 替换（*substitute*）$\theta = [\delta/\alpha, \delta/\beta]$ 得到要证明的wff $\delta \to (\delta \to \delta)$
2. 然而，我们并没有 $\vdash \delta$ 来令我们使用MP，此路不通。所以要采取一些别的策略
3. 另一个只包含 $\to$ 连词的公理是1.22.8：$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$，同样注意最后一部分
   - 进行替换 $\theta = [\delta/\alpha, \delta/\gamma]$ 得到

$$(\delta \to (\beta \to \delta)) \to ((\delta \to \beta) \to (\delta \to \delta))$$

4. 其中 $(\delta \to (\beta \to \delta))$ 已经是公理，而且无论我们将 β 替换为什么都可以
   - 最后我们只要考虑让 $(\delta \to \beta)$ 可证：替换 $\theta' = [(\delta \to \delta)/\beta]$，即可满足公理1.22.7

证明第二个例子的正式写法

试**用命题逻辑公理**证明:

$$\vdash \delta \to \delta$$

证明:

$$\begin{array}{lll}
1. & \delta \to ((\delta \to \delta) \to \delta) & \text{Ax } 1.22.7 \\
2. & (\delta \to ((\delta \to \delta) \to \delta)) \to & \\
 & \quad ((\delta \to (\delta \to \delta)) \to (\delta \to \delta)) & \text{Ax } 1.22.8 \\
3. & (\delta \to (\delta \to \delta)) \to (\delta \to \delta) & 1, 2\ \text{MP} \\
4. & \delta \to (\delta \to \delta) & \text{Ax } 1.22.7 \\
5. & \delta \to \delta & 3, 4\ \text{MP}
\end{array}$$

Q.E.D.

Hilbert style proof 的 LaTeX 源码

试用**命题逻辑公理**证明：

$$\vdash \delta \rightarrow \delta$$

```
\begin{eqnarray*}
  1.\quad & & \delta\rightarrow((\delta\rightarrow\delta)\rightarrow\delta) &\quad \
  2.\quad & & (\delta\rightarrow((\delta\rightarrow\delta)\rightarrow\delta))\rightar
                  & & \quad ((\delta\rightarrow(\delta\rightarrow\delta))\rightarr
  3.\quad & & (\delta\rightarrow(\delta\rightarrow\delta))\rightarrow(\delta\rightar
  4.\quad & & \delta\rightarrow(\delta\rightarrow\delta) &\quad \text{Ax}\,1.22.7\\
  5.\quad & & \delta\rightarrow\delta &\quad 3,4\,\text{MP}
\end{eqnarray*}
```

第三个例子

试**用命题逻辑公理**证明亚里士多德的三段论：

$$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$$

证明：

1.	$\alpha \to \beta$	Hyp.
2.	$\beta \to \gamma$	Hyp.
3.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	Ax 1.22.7
4.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$	2, 3 MP
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	Ax 1.22.8
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	4, 5 MP
7.	$\alpha \to \gamma$	1, 6 MP

Q.E.D.

更多的命题逻辑公理/定理/重言式

随着推理的进行，我们可以不断扩充定理集合：

1. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
2. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$
3. ……（无穷多个）
4. *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*

演绎定理

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

$\vdash$ 的性质

根据上面对推理的定义，我们可断言$\vdash$的几个性质（显然成立）：

- （自反性，*reflexivity*）若$\alpha \in \Gamma$，那么有$\Gamma \vdash \alpha$
- （单调性，*monotonicity*）若$\Gamma \vdash \alpha$，那么有$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$
- （传递性，*transitivity*）若$\Gamma \vdash \alpha$且$\alpha \vdash \beta$，那么$\Gamma \vdash \beta$

此外，我们可以得到另一个简单的结论（“meta”版的MP规则）：

引理 1.24：

若$\Gamma \vdash \alpha$且$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$，那么$\Gamma \vdash \beta$

演绎定理（Deduction Theorem）

定理1.25（演绎定理）：

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$当且仅当$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

演绎定理的证明:

- $\Leftarrow$：根据$\vdash$的单调性，若$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$，则$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$；根据自反性有$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$；根据引理1.24可得$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$
- $\Rightarrow$：对$\Gamma \cup \{\alpha\}$到β的证明长度施归纳
  - 奠基：若证明长度为一，要么β是公理/重言式，要么$\beta \in \Gamma$
    - 若$\beta \in \Gamma$，那么显然有$\Gamma \vdash \beta$；同时根据公理1.22.7有$\Gamma \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$。因此，根据引理1.24可得$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$
    - 若$\beta \notin \Gamma$，要么$\beta = \alpha$，此时$\alpha \to \alpha$为定理（前例已证）；要么β是公理/重言式。两种情况下都有$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

演绎定理（Deduction Theorem）

演绎定理的证明：

- $\Rightarrow$：对$\Gamma \cup \{\alpha\}$到β的证明长度施归纳
  - 归纳：
    - **归纳假设**：关于长度小于n的演绎定理成立
    - 假设存在一个从$\Gamma \cup \{\alpha\}$到β的长度为n的证明，且β是由MP规则推出（否则根据证明定义，有$\beta \in \Gamma$、$\beta = \alpha$或$\vdash \beta$成立）
    - 那么从$\Gamma \cup \{\alpha\}$到β的证明前段中必然存在$\gamma \to \beta$以及γ，且它们的证明长度均小于n。因此有

$$\Gamma \vdash \alpha \to (\gamma \to \beta)$$
$$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$$

    - 根据公理1.22.8可知

$$\Gamma \vdash (\alpha \to (\gamma \to \beta)) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))$$

    - 结合上述关于γ的命题，连续应用两次引理1.24即可证$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$。 Q.E.D.

命题逻辑公理系统的可靠性

$$\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha$$

可靠性（Soundness）

一个“可靠”的系统，例如希尔伯特提出的公理系统，必须不能推出任何不成立的结论。可靠性（Soundness）是对推导系统的安全性保证，它必须有：

1. 任何可从空集推导出的α都是有效的（valid）
2. 若α是可由某些Γ推导得出，那它必须是其逻辑结论（consequence）
3. 若一个wff集是不一致的，那么它一定是不可满足的

如果不满足这三点，这个推导系统**必然会推出多余的、且不必要的结论**

命题1.26：

定义1.22中的所有命题逻辑公理均为重言式

命题逻辑的可靠性

定理1.27（命题逻辑的可靠性，*soundness*）：

若$\Gamma \vdash \alpha$，那么$\Gamma \vDash \alpha$

证明概要：

1. 对$\Gamma \vdash \alpha$的证明长度n施归纳
   - $n = 1$时α来自公理或Γ，因此若存在$\bar{v}$令$\bar{v} \vDash \Gamma$，必然有$\bar{v}(\alpha) = T$
2. 归纳假设：证明长度为$n < k$时可靠性成立，只需证$n = k$时成立
   - 若$\Gamma \vdash \alpha$的证明长度为k，且由MP规则推出（否则α证明长度小于k，显然有可靠性），那么证明序列的前$k - 1$个wff中必然存在$\beta \to \alpha$且β
   - 利用语义演绎定理（定理1.15）的一个形式：$\Gamma \vDash \alpha \to \beta$当且仅当$\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$即可得证

命题逻辑公理系统的完备（完全）性

$$\Gamma \vDash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$$

命题逻辑的完备性（Completeness）

定理 1.28（命题逻辑的完备性，*completeness*）：

若$\Gamma \vDash \alpha$，那么$\Gamma \vdash \alpha$

1. **意义**：一切为“真”的命题（定理），都可以通过公理系统推导（证明）得出
2. **难点**：这是一条关于$\vdash$的命题。然而对所有符合条件的$\langle \Gamma, \alpha \rangle$，$\Gamma \vDash \alpha$几乎给不了我们任何信息来帮助我们构造一个由$\Gamma$到$\alpha$的推导
3. **窍门**：用$\Gamma \nvdash \alpha$推出$\Gamma \nvDash \alpha$
   - $\Gamma \nvdash \alpha$意味着$\Gamma \vdash \neg\alpha$（why? 因为命题逻辑是**可判定的**），进而意味着$\Gamma \cup \{\alpha\}$是不一致的

回忆：一个推演是有效的，当且仅当它的前提和其结论的否定是不一致的

一致性

定义1.29（一致性，*consistency*）：

一个wff集合Γ是一致的（*consistent*），当且仅当$\Gamma \nvdash \bot$

一些关于一致性的的要点：

- 一致性是关于"证明/推导"（$\vdash$）的性质，**不是关于语义（$\vDash$）的性质！**
- Γ一致意味着$\Gamma \vdash \alpha$与$\Gamma \vdash \neg\alpha$不能同时成立
- 若Γ是不一致的（inconsistent），那么对任意wff α有$\Gamma \vdash \alpha$
- 若$\Gamma \vdash \alpha$且$\Gamma \cup \{\alpha\}$是不一致的，那么Γ本身也不一致

一致性

定理1.30：

$\Gamma \vdash \alpha$当且仅当$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$不一致

证明：

1. （$\Rightarrow$）假设$\Gamma \vdash \alpha$
   - 根据$\vdash$的单调性有$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$；根据$\vdash$的自反性有$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$
   - 根据公理1.22.10有$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \bot)$
   - 连续运用两次引理1.24，即可得$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \bot$（不一致的定义）
2. （$\Leftarrow$）假设$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \bot$
   - 根据演绎定理有$\Gamma \vdash \neg\alpha \to \bot$；
   - 根据公理1.22.13有$\Gamma \vdash (\neg\alpha \to \bot) \to \neg\neg\alpha$，因此根据引理1.24有$\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$
   - 公理1.22.14告诉我们$\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$，根据引理1.24有$\Gamma \vdash \alpha$

Q.E.D.

一致性、可满足性与完备性

引理 1.31 [Hao et al., pp.50]：下列命题等价：

1. 若 Γ 一致，则 Γ 可满足
2. 若 $\Gamma \vDash \alpha$，则 $\Gamma \vdash \alpha$

证明：

1. （$1 \Rightarrow 2$）反证法。假设1和2的前提成立，且 $\Gamma \nvdash \alpha$
   - » 根据定理1.30有 $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ 是一致的，因此它也可满足。设存在一个真值指派 v 满足它
   - » 一方面，根据 $\Gamma \vDash \alpha$ 可知所有满足 Γ 的 $\bar{v}$ 均满足 α
   - » 另一方面，存在一个满足 Γ 的 $\bar{v}$ 满足 $\bar{v}(\neg\alpha) = T$，亦即 $\bar{v}(\alpha) = F$。矛盾
2. （$2 \Rightarrow 1$）反证法。假设2和1的前提成立，且 Γ 不可满足
   - » 由于 Γ 是一致的，因此 $\Gamma \nvdash \bot$
   - » 然而，若 Γ 不可满足，则对任意wff α 有 $\Gamma \vDash \alpha$
   - » 那么根据2有 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\Gamma \vdash \neg\alpha$。矛盾

Q.E.D.

证明完备性的思路

至此，我们或许能够利用关于Γ的一致性来构造一个真值指派v，以使$\bar{v}$能够满足Γ中的任意wff。这种v也被称为Γ的模型（*model*）

1. 如果Γ只有命题词$\mathbf{A}_i$，显然存在一个模型满足它
2. 如果Γ只有原子公式（atomic wff），即还有一些命题词的否定$\neg\mathbf{A}_i$，也显然存在一个模型满足它，so far so good
3. 如果Γ存在一些更复杂的公式呢？比如$\alpha \wedge \beta$？那么Γ的模型也是$\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$的模型；如果它包含$\alpha \vee \beta$，那么它的模型也满足$\alpha$和$\beta$中的至少一个
4. **启示**：可以给Γ不断增加原子wff，同时保证其一致
   1. 对于一个原子公式$\alpha = \mathbf{A}_i$，要么增加α，要么增加$\neg\alpha$（extending）
   2. 若$\alpha \wedge \beta$在里面，......；若$\alpha \vee \beta$在里面，......（consistent set）
   3. 不断增加原子公式直到无法再增加可得Γ^*。它所有原子wff的模型就是Γ的模型，即$\bar{v}(\Gamma^*) \vDash \Gamma$（complete consistent set）

命题的完备（完全）集

定义 1.33（完全集，*complete set*）：

一个wff集合Γ被称为完全集当且仅当对任意wff α，要么$\alpha \in \Gamma$，要么$\neg\alpha \in \Gamma$

定理 1.34：

如果Γ是完全且一致的，那么：

1. 若$\Gamma \vdash \alpha$，则$\alpha \in \Gamma$
2. $\alpha \to \beta \in \Gamma$当且仅当要么$\alpha \notin \Gamma$，要么$\beta \in \Gamma$

Lindenbaum 引理

引理 1.35 [Hao et al., pp.50]：

每一个一致的wff集合Γ都可被扩张为一个完全且一致的集合（极大一致集）Γ^*

证明概要：

- （构造）设Γ是一致的，令$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$是（命题逻辑）语言中所有wff的一个枚举。定义$\Gamma_o = \Gamma$，且

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{if } \Gamma \cup \{\alpha_n\} \text{ is consistent;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

  令$\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$，显然它是完全的

- 【断言1】每一个Γ_n都是一致的：根据定义可知Γ_o一致；设Γ_n一致。若$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$，则说明后者是一致的，否则$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$必然一致。不然会有$\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$与$\Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$同时不一致，与$\Gamma_n$一致矛盾（why?）

Lindenbaum 引理

引理 1.35 [Hao et al., pp.50]：

每一个一致的wff集合Γ都可被扩张为一个完全且一致的集合（极大一致集）Γ^*

（续）证明概要：

- 【断言 2】对所有的n和$i < n$有$\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$：对$n$施归纳。当$n = 0$时不存在$i < n$，断言自然成立；若断言对$n$成立，那么根据其构造方式有$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$或者$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$，因此$\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$。而对$i < n$根据归纳假设有$\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$，根据$\subseteq$的传递性可知$\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$
- 由以上可知，Γ^*的任意一个有穷子集都是某一个Γ_n（有穷）的子集，而所有Γ_n是一致的，意味着Γ^*的所有有穷子集都是一致的，因此Γ^*一致 Q.E.D.

构造Γ^*的模型

定义1.36：

令Γ^*是一个完备一致的wff集合，对其中的每个**原子命题A**令

$$v(\Gamma^*) = \begin{cases} T & \text{if } \mathbf{A} \in \Gamma; \\ F & \text{if } \mathbf{A} \notin \Gamma \end{cases}$$

引理1.37 [Hao et al., pp.50]**：**

$v(\Gamma^*)$是Γ^*的模型（*model*），即$v(\Gamma^*) \vDash \alpha$当且仅当$\alpha \in \Gamma^*$

证明概要：对α做结构归纳。 Q.E.D.

完备性定理

定理 1.28'（命题逻辑的完备性，*completeness*）：

若 Γ 是一致的，那么 Γ 可满足

证明：

若 Γ 是可满足的，根据 Lindenbaum 引理，存在一个完备一致集 $\Gamma^* \supseteq \Gamma$。根据引理 1.37，$\Gamma^*$ 存在一个模型 $v(\Gamma^*)$，且对任意 $\alpha \in \Gamma^*$ 有 $v(\Gamma^*) \vDash \alpha$。

综上，Γ 是可满足的。 Q.E.D.

小结

命题逻辑的语法

- 命题逻辑表达式
- 命题逻辑合式公式
  - 归纳定义
- 命题逻辑公式的结构
  - 结构归纳证明
  - 唯一可读性定理

命题逻辑的语义

- 赋值函数与赋值的扩张
- 语义蕴涵（$\vDash$）
- 联词的语义
  - 联词的完全组

命题逻辑的证明

- 自然演绎
  - 树状证明，矢列
- 公理系统
  - Hilbert式证明
- 演绎定理

命题逻辑的可靠性和完备性

- 命题逻辑的可靠性
- 命题逻辑的完备性
  - 一致性
  - 紧致性
  - 可满足性
  - Lindenbaum引理