

数理逻辑（2024 春）作业 - 05

I 利用一阶逻辑证明二元关系中的相关结论

回忆你在《离散数学》中学过关于“二元关系”（*relation*）的知识，特别是关于传递性（*transitive*）、对称性（*symmetric*）、自反性（*reflexive*）和等价性（*equivalent*）的定义。在此基础上，对一个集合中的二元关系 R 来说：

- 如果当 $R(a, b)$ 和 $R(a, c)$ 成立则 $R(b, c)$ 也成立，那么我们称 R 是一个**欧几里得关系**（*Euclidean*）
 - 注：这里其实只定义了**右欧几里得性**（*right-Euclidean*），但不影响问题的理解和证明
- 如果只要 $R(a, b)$ 成立则必有 $R(b, a)$ 不成立，那么我们称 R 是**非对称的**（*asymmetric*）
- 如果任意一个元素与自己都不构成 R 关系，那么我们称 R 是**反自反的**（*irreflexive*）

请举例一个“既不自反也不反自反”的关系；再举例一个“既不对称也不非对称”的关系。接下来，请判断它们是否正确，并形式化为 FOL 来证明你的结论（六选三）。注意，若你认为命题是假的，那么举一个有效的反例即可（不必要进行形式化证明）。

1. 若 R 是非对称的，那么它是反自反的
2. 若 R 是传递且反自反的，那么它是非对称的
3. 若 R 是传递且对称的，那么它是自反的
4. 若 R 是等价关系，那么它也是欧几里得关系
5. 若 R 是欧几里得关系且是非对称的，那么它是反自反的
6. 若 R 是欧几里得关系且是自反的，那么它是一个等价关系