数理逻辑

03 - 一阶逻辑

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

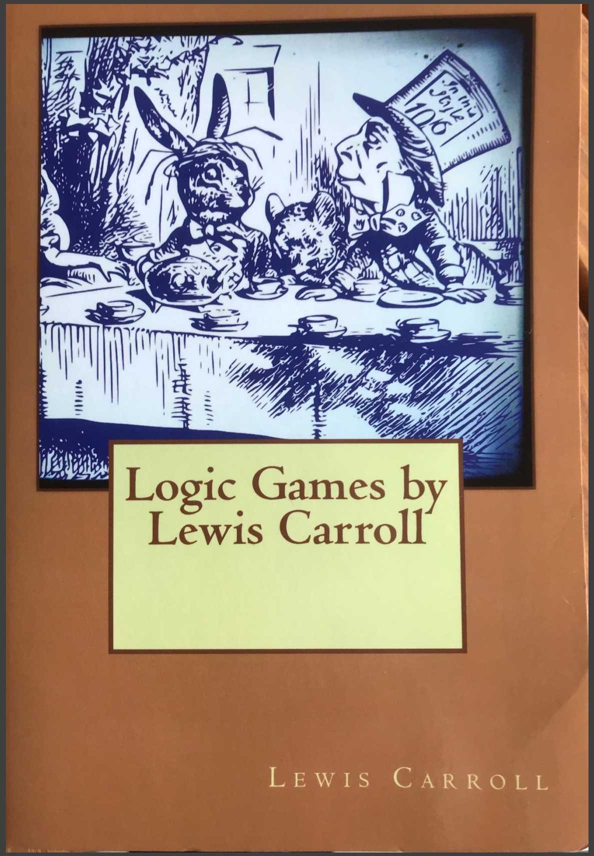
2024年 - 春季

https://daiwz.net

Lewis 的谜题

Games from Lewis Carroll

1. No kitten, that loves fish, is unteachable;
2. No kitten without a tail will play with a gorilla;
3. Kittens with whiskers always love fish;
4. No teachable kitten has green eyes;
5. No kittens have tails unless they have whiskers.
6. Q: Kitten with green eyes will play with a gorilla?



语法

一阶语言

什么是**一阶（first-order）**？

一阶语言

逻辑符号

1. 标点符号："("，")"，","
2. 联结词：$\rightarrow$，$\neg$
   - 其它联结词：$\wedge, \vee, \leftrightarrow$
3. 变元（可数无穷个）：$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots$
4. 量词：$\forall$
   - 其它量词：$\exists$
5. 等词（可选）：$=$

非逻辑符号 （signature）

1. n元谓词（可数无穷个），$n \geq 1$: $A_0^n, A_1^n, \ldots$
2. 常元（可数无穷个）：$c_0, c_1, \ldots$
   - 特殊常元：$\top, \bot, T, F$
3. n元函数（可数无穷个）：$f_0^n, f_1^n, \ldots$

一阶语言的例子

纯一阶逻辑（*pure First-Order Logic, FOL*）

常元	$c_0, c_1, \ldots$
n元谓词	$A_0^n, A_1^n, \ldots$
n元函数	$f_0^n, f_1^n, \ldots$
等词	无

集合论

常元	$\emptyset$
2元谓词	$\in$
n元函数	无
等词	有

一阶语言的例子

初等数论

常元	$\mathbf{0}$
谓词	$<$
1元函数	$\mathbf{S}$
2元函数	$+, \times, \mathbf{E}$
等词	有

- 注：$\mathbf{S}, \mathbf{E}$分别为后继和指数函数

上面的例子里，我们只是按照习惯来定义各个language signature中谓词与函数的**记号**，例如$<, \in, \leq$只是A_0^2；$\mathbf{0}, \emptyset$为c_0；$+, \times, \mathbf{E}$为f_0^2, f_1^2, f_3^2

FOL之于数学

因为:

- 一阶语言包含集合论语言
- 一切数学都可被嵌入在集合论中

所以:

1. 集合论的**一阶语言**能够描述任意数学
2. 一切数学定理都来自对集合论公理的**逻辑推导**

一阶逻辑语言足以描述一切数学结构吗?

FOL的例子 [Enderton, pp.73]

1. “所有苹果都坏了”

$$\forall \boldsymbol{v}_1 (A(\boldsymbol{v}_1) \to B(\boldsymbol{v}_1))$$

2. “有些苹果坏了”

$$\exists \boldsymbol{v}_1 (A(\boldsymbol{v}_1) \land B(\boldsymbol{v}_1))$$

$$\neg \forall \boldsymbol{v}_1 (\neg(\neg(A(\boldsymbol{v}_1) \to (\neg B(\boldsymbol{v}_1)))))$$

3. 所有X都属于Y
   - $\forall \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \to Y(\boldsymbol{v}_2))$
   - $\forall \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \land Y(\boldsymbol{v}_2))$（语气太强：所有东西都是$X$而且也是$Y$）
4. 存在X属于Y
   - $\exists \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \land Y(\boldsymbol{v}_1))$
   - $\exists \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \to Y(\boldsymbol{v}_1))$（语气太弱：存在一些东西，只有当它是$X$时，它才是$Y$）

项

定义 2.1（项，*term*）[Enderton, pp.74]：

每个n元函数符号f对应一个n元项构造算子$\mathcal{F}_f$：

$$\mathcal{F}_f(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = f\epsilon_1 \cdots \epsilon_n$$

一阶逻辑的项的集合是常元和变元符号经过（0次或多次）$\mathcal{F}_f$运算得到的表达式集合

例如：

$$+\,\boldsymbol{v}_2\mathbf{S0},$$
$$\mathbf{SSSS0},$$
$$+\,\mathbf{E}\boldsymbol{v}_1\mathbf{SS0}\,\mathbf{E}\boldsymbol{v}_2\mathbf{SS0}.$$

原子公式

定义 2.2（原子公式，*atomic formula*，*atom*）[Enderton, pp.74]：

一阶逻辑的原子公式是如下形式的表达式

$$Pt_1 \cdots t_n$$

其中 P 是 n 元谓词，$t_1, \ldots, t_n$ 是项

例如：

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2, \\ &< \mathbf{SS0}\,\mathbf{SSSS0}, \\ &= \mathbf{E}\boldsymbol{v}_1\mathbf{SS0}\,\mathbf{E}\boldsymbol{v}_2\mathbf{SS0}. \end{aligned}$$

合式公式

定义 2.3（合式公式，*well-formed formula*，*wff*）[Enderton, pp.75]：

一阶逻辑的合式公式集合是原子公式通过运用0次或多次公式构造算子 $\mathcal{E}_\neg, \mathcal{E}_\leftarrow, \mathcal{Q}_i (i = 1, 2, \ldots)$形成的表达式集合。其中

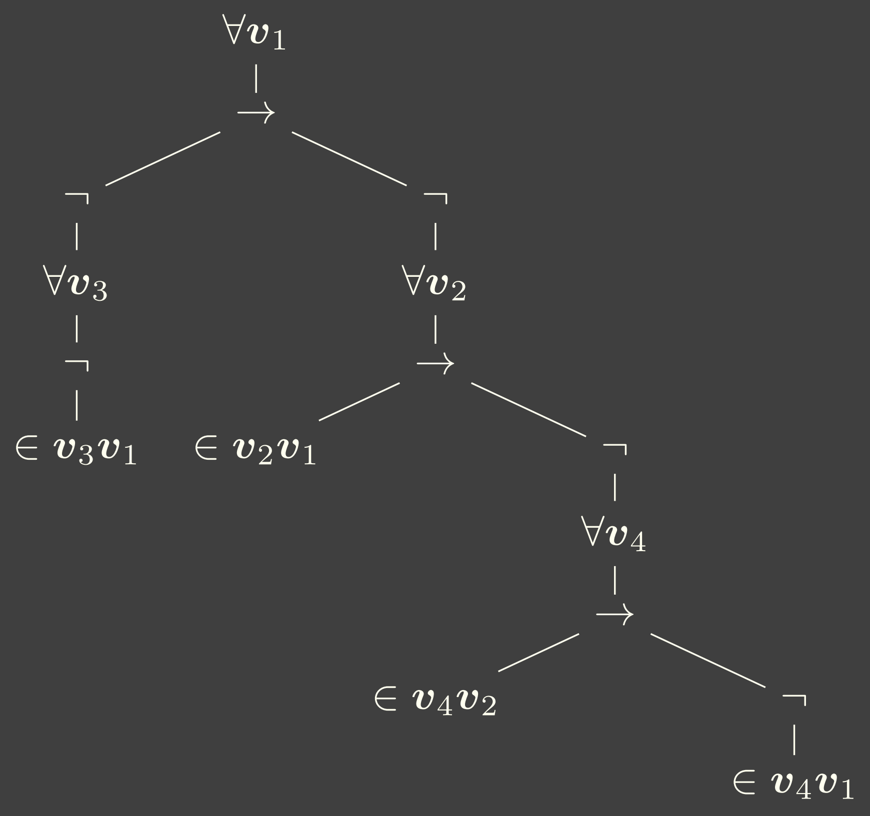
$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\neg(\gamma) &= (\neg\gamma) \\
\mathcal{E}_\leftarrow(\gamma, \delta) &= (\gamma \leftarrow \delta) \\
\mathcal{Q}_i(\gamma) &= \forall \boldsymbol{v}_i \gamma
\end{aligned}
$$

例如：

- $\neg \boldsymbol{v}_i$ 不是wff
- $\forall \boldsymbol{v}_1((\neg\forall \boldsymbol{v}_3(\neg \in \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1)) \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_2(\in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1 \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_4(\in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_2 \to (\neg \in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1))))))$ 是wff（ZFC的正则公理）

合式公式

$$\forall \boldsymbol{v}_1((\neg\forall \boldsymbol{v}_3(\neg \in \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1)) \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_2(\in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1 \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_4(\in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_2 \to (\neg \in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1))))))$$



自由变元

- $\forall \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1$
  - “所有集合都是____$_1$ 的元素”
- $(\neg\forall \boldsymbol{v}_1 (\neg\forall \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1))$
  - “存在一个集合，任意集合都是它的元素”
  - 记$\exists x\, \alpha \equiv \neg\forall x\, (\neg\alpha)$

自由变元

$$\varphi \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j$$

自由变元

定义2.4（自由出现，*occur free*）[Enderton, pp.76]：

考虑一个变元$\boldsymbol{x}$，我们递归地定义：

1. 对于原子公式α，$\boldsymbol{x}$在α中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中出现
2. $\boldsymbol{x}$在$(\neg\alpha)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中自由出现
3. $\boldsymbol{x}$在$(\alpha \to \beta)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中自由出现或在β中自由出现
4. $\boldsymbol{x}$在$(\forall \boldsymbol{v}_i \alpha)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在$\alpha$中出现且$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{v}_i$

若一个变元如果不是自由（*not free*）的，则我们称它为（受）约束的（*bounded*）。若一个wff没有自由出现的变元，则称它是闭公式（*closed wff*）或语句（*sentence*）

变元替换

$$(\varphi)_2^k = (\sum_{j=0}^{k} a_j)_2^k = \sum_{j=0}^{2} a_j$$

变元替换

$$(\varphi)_i^j = (\sum_{j=0}^{k} a_j)_i^j = \sum_{j=0}^{k} a_j$$

变元替换

定义 2.5a（替换，*substitution*）[Enderton, pp.112]

wff中的变元替换（substitution）可递归地定义如下：

1. 对任意原子公式α，α^x_t是用项t代替α中出现的所有x后所得的表达式
2. $(\neg\alpha)^x_t = (\neg\alpha^x_t)$
3. $(\alpha \to \beta)^x_t = (\alpha^x_t \to \beta^x_t)$
4. $(\forall y\, \alpha)^x_t = \begin{cases} \forall y\, \alpha, & \text{if } x = y \\ \forall y\, (\alpha)^x_t, & \text{if } x \neq y \end{cases}$

我们记这个替换算子为$\theta = [t/x]$，则$\alpha^x_t = \alpha \circ \theta = \alpha\theta$

变元替换

$$[\sum_{j=0}^{n}(k \cdot a_j)]_{f(j)}^{k} \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{n}(f(j) \cdot a_j)$$

可替换

定义 2.5b（可替换，*substitutable*）[Enderton, pp.112]

我们定义项t对于α中的变元x是可替换的（substitutable）如下：

1. 对任意原子公式α，项t对于α中出现的所有x都是可替换的（原子公式无量词）
2. 项t对于$(\neg\alpha)$中的x是可替换的，当且仅当它对α中出现的x是可替换的
3. 项t对于$(\alpha \to \beta)$中的x是可替换的，当且仅当它对α和β中出现的x均是可替换的
4. 项t对于$\forall y\,\alpha$中的x是可替换的当且仅当：
   - x在$\forall y\,\alpha$中是约束出现的（为保证替换后不影响原公式意义），或者
   - y在t中未出现（为保证t中的变元不在替换后被$\forall y$量化）且t对于α中的x是可替换的

替换的例子

一阶逻辑的Hilbert系统里有一条公理模式：

$$\forall x\, \alpha \to \alpha_t^x$$

其中t对于α中的x是可替换的，那么：

- 以下wff是该公理模式的一个实例

$$\forall \boldsymbol{v}_3\, (\forall \boldsymbol{v}_1\, (A\boldsymbol{v}_1 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, A\boldsymbol{v}_2) \to (A\boldsymbol{v}_2 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, A\boldsymbol{v}_2))$$

  - 其中α是$(A\boldsymbol{v}_1 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, A\boldsymbol{v}_2)$，$x$是$\boldsymbol{v}_1$，$t$是$\boldsymbol{v}_2$
- 以下wff则不是该公理模式的实例

$$\forall \boldsymbol{v}_1\, \forall \boldsymbol{v}_2\, B\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, B\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2$$

  - 因为$\boldsymbol{v}_2$在$B\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$中受约束，因此$\boldsymbol{v}_1$对其是不可替换的

证明

证明的定义

定义2.6（定义1.19-21）（*proof, deduction, or derivation*）[Enderton, pp.111]:

从Γ到φ的证明（推导）是一个有穷的wff序列$\langle\alpha_0,\ldots,\alpha_n\rangle$，其中$\alpha_n$就是$\varphi$且对任意$k\leq n$有

1. α_k属于$\Gamma\cup\Lambda$（Λ为公理集），或者
2. α_k是由序列中位于它前面的两个wff经过MP规则推导而得；即存在$i,j\leq k$有α_j为$\alpha_i\to\alpha_k$

若以上证明存在，我们就说φ是从Γ出发可证的（*provable, deducible or derivable*），或称φ是Γ中的定理（*theorem of* Γ），记为$\Gamma\vdash\varphi$

一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Enderton, pp.110]：

令α与β为FOL wff，x和y为变元。FOL的公理集Λ是具有以下形式的wff的所有概括：

1. 重言式（例如定义1.22中的公理）
2. $\forall x\, \alpha \to \alpha^x_t$，其中$t$对于$\alpha$中的$x$是可替换的
   - 它的逆否命题也是公理：$\beta \to \exists x\, \beta^t_x$，其中$x$不在$t$中出现
3. $\forall x\, (\alpha \to \beta) \to (\forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta)$
4. $\alpha \to \forall x\, \alpha$，其中$x$不在$\alpha$中自由出现
5. （有等词时）$x = x$
6. （有等词时）$(x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中$\alpha$为原子公式，$\alpha'$为对$\alpha$中的$x$进行0次或多次替换后得到的wff

一阶逻辑中的公理系统

（续）定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）：

该公理系统中只有一条 MP 推理规则，即若推导中已有 $\beta \to \alpha$ 和 β，那么 α 也是正确的，即：

$$\beta, (\beta \to \alpha) \vdash \alpha$$

一阶逻辑推导的例子

试证：公理 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明：

Lemma 1：$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$，根据演绎定理，即证$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

1.	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$	AX 1.22.9
2.	$\alpha \to \beta$	Hyp
3.	$(\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$	1, 2 MP
4.	$\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta)$	Ax, 1.22.7
5.	$\neg\beta$	Hyp
6.	$\alpha \to \neg\beta$	4, 5 MP
7.	$\neg\alpha$	3, 6 MP

一阶逻辑推导的例子

试证：定义2.7.2的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明（Cont'd）：

Lemma 2（*syllogism*）:$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$，用演绎定理易证

Lemma 3:$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$，根据演绎定理，即证$\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$

$$\begin{array}{lll}
1. & \alpha & \text{Hyp} \\
2. & \alpha \to (\neg\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) & \text{Ax } 1.22.3 \\
3. & \alpha \to (\neg\alpha \to \bot) & \text{Rewrite/Def} \\
4. & \neg\alpha \to \bot & 1,3 \text{ MP} \\
5. & (\neg\alpha \to \bot) \to \neg\neg\alpha & \text{Ax } 1.22.13 \\
6. & \neg\neg\alpha & 4,5 \text{ MP}
\end{array}$$

一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明（Cont'd）：

$$\begin{array}{lll}
1. & \forall y \neg Py \to \neg Px & \text{AX 2.7.2} \\
2. & (\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (\neg\neg Px \to \neg \forall y \neg Py) & \text{Lemma 1} \\
3. & \neg\neg Px \to \neg \forall y \neg Py & 1, 2\ \text{MP} \\
4. & \neg\neg Px \to \exists y Py & \text{Rewrite 3} \\
5. & (Px \to \neg\neg Px) \to [(\neg\neg Px \to \exists y Py) \to (Px \to \exists y Py)] & \text{Lemma 2} \\
6. & Px \to \neg\neg Px & \text{Lemma 3} \\
7. & (\neg\neg Px \to \exists y Py) \to (Px \to \exists y Py) & 5, 6\ \text{MP} \\
8. & Px \to \exists y Py & 4, 7\ \text{MP}
\end{array}$$

Q.E.D.

一阶逻辑推导的例子2

试证：

$$\vdash (\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall x\, (Px \wedge Qx)$$

证明：

Lemma：$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$，根据演绎定理和公理1.22.3易证

1.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall x\, Px$	Ax 1.22.1
2.	$\forall x\, Px \to Pt$	AX 2.7.2
3.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to Pt$	1, 2 Syl.
4.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall y\, Qy$	Ax 1.22.1
5.	$\forall y\, Qy \to Qt$	AX 2.7.2
6.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to Qt$	4, 5 Syl.
7.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to (Pt \wedge Qt)$	3, 6 Lemma
8.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall x\, (Px \wedge Qx)$	Ded. and Gen.

Q.E.D.

一阶逻辑的元定理

演绎定理

引理2.8（T规则）[Enderton, pp.118]:

若$\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$且$\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$重言蕴涵$\beta$（即$(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots \to (\alpha_n \to \beta)))$为重言式），则$\Gamma \vdash \beta$

- 通过n次MP推理可证

定理2.9（演绎定理）[Enderton, pp.118]:

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$当且仅当$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

- **证明**：见命题逻辑的演绎定理（1.25）

一些其它的元定理

推论 2.10（逆否命题，*Contraposition*）[Enderton, pp.119]：

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当且 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

- 前面的例子中已证

推论 2.11（归谬，*Reductio ad Absurdum*，*RAA*）[Enderton, pp.119]：

若 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，则 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

- 证明过程与命题逻辑的定理 1.30 类似

概括定理

定理2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

证明：

令φ存在一个证明$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \varphi \rangle$，利用对证明长度施归纳即可证明该定理。

- **奠基：** 当证明长度为1时，$\varphi \in \Gamma$，根据公理2.7.4可知当x不在φ中自由出现时有$\varphi \to \forall x\, \varphi$，根据演绎定理可得$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

概括定理

定理 2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

证明（续）：

- **归纳**：假设$j < i$时对任意j有该结论成立，下面对于α_i分情况讨论：
  - $\alpha_i \in \Lambda$，根据定义有$\forall x\, \alpha_i$依然是逻辑公理，显然有$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_i$（尽管$x$可能在$\alpha_i$中出现，但不影响结论）
  - $\alpha_i \in \Gamma$，与奠基情况一致
  - α_i由α_j与$\alpha_j \to \alpha_i$通过MP规则得到。由归纳假设有$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_j$且$\Gamma \vdash \forall x\, (\alpha_j \to \alpha_i)$。对公理2.7.3

$$\forall x\, (\alpha_j \to \alpha_i) \to (\forall x\, \alpha_j \to \forall x\, \alpha_i)$$

运用两次MP规则即可得$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_i$ Q.E.D.

概括定理

定理2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

- 可见，公理2.7.3与2.7.4存在的作用就是为了证明概括定理
  - **2.7.3** $\forall x\,(\alpha \to \beta) \to (\forall x\,\alpha \to \forall x\,\beta)$
  - **2.7.4** $\alpha \to \forall x\,\alpha$，其中$x$不在$\alpha$中自由出现
- 概括定理在有些逻辑系统中被作为推理规则（如Gentzen的LK自然演绎系统等）
  - 若能对x不进行假设（约束）即可证明命题__x__，那么可以说“由于x的任意性，我们有$\forall x$__x__成立”
- 常见的用法：“*without loss of generality*”（不失一般性，*WLOG*）
  - 用特例代替一般性推理，最后概括（同时使用公理2.7.2与概括定理）

另一套公理系统

定义 2.7'（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Open Logic, section 10.1]：

公理（Λ）：

1. 命题逻辑公理（定义 1.22）的FOL概括
2. 关于量词的公理：对闭项（*closed term*，即不含变元的项）有
   - $\forall x\, \beta \to \beta^x_t$
   - $\beta(t) \to \exists x\, \beta$ [Enderton, pp. 124] (*Rule EI*)

推理规则:

1. MP规则
2. 关于量词的推理规则（QR）：
   - 若 $\beta \to \alpha(a)$ 已经出现在证明序列中，且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现，那么 $\beta \to \forall x\, \beta(x)$ 是正确的
   - 若 $\alpha(a) \to \beta$ 已经出现在证明序列中，且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现，那么 $\exists x\, \beta(x) \to \beta$ 是正确的

概括定理

例：

1. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash Qc$，显然
2. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash Qy$，和1类似
3. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash \forall y\,Qy$，不失一般性
4. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash \forall x\,Qx$，约束变元换名

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]:

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明:

令$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \varphi \rangle$是从$\Gamma$到$\varphi$的一个证明，令$y$为第一个不在任意$\alpha_i, i \in \{0, \ldots, n\}$中出现的变元。那么可以断言

$$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$$

是一个从Γ到φ^c_y的一个推演。为证明这个断言，需验证每个$(\alpha_k)^c_y$要么属于$\Gamma \cup \Lambda$，要么根据MP规则从$\{(\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_{k-1})^c_y\}$中推导而来。

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]:

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明（续）：
下面对未作替换的α_k分情况讨论:

1. $\alpha_k \in \Gamma$：因此c不在α_k中出现，可知$(\alpha_k)^c_y = \alpha_k \in \Gamma$
2. $\alpha_k \in \Lambda$：即α_k为定义2.7中的逻辑公理，那么在$(\alpha_k)^c_y$依然是一条逻辑公理（Why?），因此$(\alpha_k)^c_y \in \Lambda$
   - 若α_k是命题逻辑中的重言式，替换其中常量得到的仍然是重言式。例如$Pc \to \neg\neg Pc$，显然有$(Pc \to \neg\neg Pc)^c_y = Py \to \neg\neg Py$，它仍是逻辑公理
   - 若α_k是$\forall x\, \psi \to \psi^x_t$，那么$(\alpha_k)^c_y$就是$\forall x\, \psi^c_y \to (\psi^x_t)^c_y$。注意到$(\psi^x_t)^c_y$正是$(\psi^c_y)^x_{t^c_y}$，所以它也是逻辑公理。其它组的公理也容易验证
3. α_k是由α_i与$\alpha_j = (\alpha_i \to \alpha_k)$（$i, j < k$）用MP规则推出：那么有$(\alpha_j)^c_y = ((\alpha_i)^c_y \to (\alpha_k)^c_y)$，因此可知$(\alpha_k)^c_k$可由$(\alpha_i)^c_y$与$(\alpha_j)^c_y$经过MP规则导出

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]：

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明（续）：

由上面的推导可知，$\langle(\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y\rangle$的确是$\varphi^c_y$的一个推演。

令Φ为$\langle(\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y\rangle$中所有$\alpha_i \in \Gamma$构成的集合。

- 显然Φ是一个有穷集合，有y不在Φ中出现且$\Phi \vdash \varphi^c_y$
- 根据概括定理，$\Phi \vdash \forall y\, \varphi^c_y$，所以$\Gamma \vdash \forall y\, \varphi^c_y$

注意到概括定理的证明中不会引入新的常元，这样就可以得到一个从Γ到$\forall y\, \varphi^c_y$的证明，且c不出现在其中。 Q.E.D.

约束变元替换

我们想证:

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall y\, Pyy$$

由于$\forall x \forall y\, Pxy$中的$x$不能用$y$进行替换，所以它无法套用公理 2.7.2。

但如果我们有

$$\vdash \forall x \forall z\, Pxz \to \forall y\, Pyy$$

显然就会好证很多。

那么只需要有

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall x \forall z\, Pxz$$

就能证明最开始的结论。

Alphabetic Variants

定理 2.14（约束变元替换定理，*Alphabetic Variants*）[Enderton, pp.126]:

令 φ 是一个 wff，t 是一个项，x 是一个变元。总可以找到一个 wff φ'，它和 φ 的差别仅在于约束变元，使得

1. $\varphi \vdash \varphi'$ 且 $\varphi' \vdash \varphi$
2. t 可以在 φ' 中无冲突地替换 x

该定理的目的是当 t 无法被用来替换 x 时，可以通过对约束变元换名来实现合法替换。

证明概要:

1. 不失一般性，可固定 t 和 x 并递归地从 φ 构造 φ'，通过结构归纳进行证明
   » 归纳假设为：应用构造算子前有 $\varphi \vdash \varphi'$（或 $\varphi' \vdash \varphi$）
2. 无量词情况较简单；对于有量词的情况构造 $(\forall y\, \varphi)' = \forall z\, (\varphi')^y_z$，其中 z 不在 φ'，x 和 t 中出现，这时 t 便可用来替换其中的 x（定理结论 2 成立）
3. 运用概括定理易证定理结论 1 成立

结构与真

可靠性与完备性