离散数学 2023 期中考试逻辑 & 证明部分参考答案

1. (From Kleene) Al, Beau, 和 Casey 被牵连至一桩罪案调查。下面是他们三人的证词:
   - Al 说:"Beau 有罪, 但 Casey 是无辜的。"
   - Beau 说:"如果 Al 是有罪的, 那么 Casey 也一样有罪。"
   - Casey 说:"我是无辜的, 但另外两个人至少有一人有罪。"

请回答下面几个问题:

1. 令符号 A, B, C 分别表示 Al, Beau 和 Casey 无罪, 将三人的证词用命题逻辑表示出来。
2. 这些证词之间一致吗? 换而言之, 是否有一种情况下这些证词都为真?
3. 这些证言之中, 有一句是另外两句的逻辑后承, 即另外两句证言逻辑蕴涵 ($\models$) 它。请问是哪两句蕴涵剩下的一句? (若答案不唯一, 任选其一即可)
4. 利用自然演绎法证明上一问中你的答案。

a) 解:

1. $\neg B \wedge C$
2. $\neg A \rightarrow \neg C$
3. $C \wedge (\neg A \vee \neg B)$

b) 解: 根据它们的真值表 (答案中可以不列):

A	B	C	$\neg B \wedge C$	$A \vee \neg C$	$C \wedge (\neg A \vee \neg B)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

可见, 当 Al 无罪, Beau 有罪且 Casey 无罪时, 三条证词是一致的。

c) 解:

1. Al 和 Beau 的证词蕴涵 Casey 的证词。
2. Beau 和 Casey 的证词蕴涵 Al 的证词。

d)

$$\neg B \wedge C, \neg A \rightarrow \neg C \vdash C \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

Proof.

1.	$\neg B \wedge C$	premise
2.	C	$\wedge$e 1
3.	$\neg B$	$\wedge$e 1
4.	$\neg A \vee \neg B$	$\vee$i 3
5.	$C \wedge (\neg A \vee \neg B)$	$\wedge$i 1,4

□

或者：

$$\neg A \to \neg C, C \wedge (\neg A \vee \neg B) \vdash \neg B \wedge C$$

Proof.

1.	$\neg A \to \neg C$	premise
2.	$C \wedge (\neg A \vee \neg B)$	premise
3.	$C \to A$	MT 1
4.	C	$\wedge$e 2
5.	A	$\to$ e 3,4
6.	B	assumption
7.	$\neg A \vee \neg B$	$\wedge$e 2
8.	$\neg A$	assumption
9.	$\bot$	$\neg$e 5,8
10.	$\neg B$	assumption
11.	$\bot$	$\neg$e 6,10
12.	$\bot$	$\vee$e 7-11
13.	$\neg B$	$\neg$i 6-12
14.	$\neg B \wedge C$	$\wedge$i 4,13

□

2. 考虑一个三元逻辑连词“$if - then - else$”，它的意思是：“如果 A 为真则 B 为真，否则 C 为真”。下面是它的真值表：

A	B	C	$if\ A\ then\ B\ else\ C$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

回答如下问题：

1. 用连词 $\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$ 和命题符 $\{A, B, C\}$ 将 $if\ A\ then\ B\ else\ C$ 表示出来，并说明为什么你的表示是正确的；
2. 用连词 $if - then - else$ 和命题符 $\{\top, \bot, p, q\}$ 表示出 $p \wedge q$，$p \vee q$，$p \leftrightarrow q$，其中 $\top$ 表示 true，$\bot$ 表示 false。例如，$\neg p$ 可表示为 $if\ p\ then\ \bot\ else\ \top$。

a) 解：

1. $(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$，由定义给出。
2. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$，由真值表给出（或者先将真值表转换为 DNF，再化简得出）。

b)

$$\begin{array}{ll} p \wedge q & if\ p\ then\ q\ else\ \bot \\ p \vee q & if\ p\ then\ \top\ else\ q \\ p \leftrightarrow q & if\ p\ then\ q\ else\ (if\ q\ then\ \bot\ else\ \top) \end{array}$$

注：最后一个需要将 $(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$ 中的 C 替换为 $\neg B$，再将 A, B 分别替换为 p, q 得到 $[(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$。所以只需应用前面的 $\neg p$ 替换掉定义里的 C 即可。

3. 寄信件的时候需要贴~~数量~~（价格）为 n 的邮票，但现在邮局里只售卖 5 分与 12 分的邮票（不限量）。请证明当 $n \geq 44$ 时，必然存在一种只用 5 分与 12 分邮票的贴法令邮票的总额为 n。

注：本道题的题干有问题，里面关于 n 的描述不一致。如果错误是因为对的 n 理解出错导致，则酌情适量给分。

Proof. 对 n 施归纳：

基础步骤：当 $n = 44$ 时，有 $5 \times 4 + 12 \times 2 = 44$。

归纳假设：假设当 $n > 44$ 时，存在正整数 x, y 使得 $n = 5x + 12y$，需要证明对 $n + 1$ 存在正整数 x', y' 使得 $n + 1 = 5x' + 12y'$。

注意到一定有 $x \geq 7$ 或者 $y \geq 2$，否则对于 $x < 7 \wedge y < 2$ 最多有 $5 \times 6 + 12 \times 1 = 42 < 44$。下面只需对这两种情况分别做讨论：

1. 若 $x \geq 7$，那么我们可以令 $x' = x - 7$ 且 $y' = y + 3$，得到：

$$5x' + 12y' = 5(x - 7) + 12(y + 3) = 5x + 12y + 1 = n + 1,$$

2. 若 $y \geq 2$，那么我们可以令 $x' = x + 5$ 且 $y' = y - 2$，得到：

$$5x' + 12y' = 5(x + 5) + 12(y - 2) = 5x + 12y + 1 = n + 1.$$

□

4. 令 $S = \{x, y \in \mathcal{R} | x^2 + y^2 = 1\}$ 试证与等势。

5. 证明：直角三角形三边边长若为整数，则其积可被 30 整除.

参考解答：直角三角形三边长若为整数，则不妨设为$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$，$a^2 + b^2 = c^2$要证明$30|abc$可证明abc中必同时含有因子 2、3 和 5。反证法：①假设a, b, c皆不能被 2 整除，即三数均为奇数，这是不可能的，因为两个奇数（如a, b）的平方和必为偶数：$2|[(2k \pm 1)^2 + (2m \pm 1)^2]$，与奇数$c$的平方为奇数矛盾，因此$2|abc$ ②假设a, b, c皆不能被 3 整除，则其可写为$3k \pm 1$的形式，$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \equiv 1 (\bmod 3)$，则$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 (\bmod 3)$，与$c^2 \equiv 1 (\bmod 3)$矛盾，因此$3|abc$. ③假设$a, b, c$皆不能被 5 整除，则其可写为$5k \pm 1$或者$5k \pm 2$的形式，$(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 \equiv 1 (\bmod 5)$，$(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 \equiv -1 (\bmod 5)$，因此$a^2 \equiv \pm 1 (\bmod 5)$，$b^2 \equiv \pm 1 (\bmod 5)$，$c^2 \equiv \pm 1 (\bmod 5)$；则$c^2 = a^2 + b^2 \equiv \pm 2 (\bmod 5)$或者$5|c^2$，两者均与$c^2 \equiv \pm 1 (\bmod 5)$矛盾，因此$5|abc$. 综上，又因为$(2,3,5) = 1$，故$30|abc$. □

6. 某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为 0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于 20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分，并继续下一轮。问：

a) 游戏结束时得分为 0 的概率是多少？

b) 游戏第一轮得分的期望值是多少？

c) 游戏结束时得分的期望值是多少？

解：

a) 得分为 0 意味着第一轮就掷出点数之乘积大于 20 的情况。所有 36 种结构中出现 (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), 和 (6,6) 这 6 种结果才会积大于 20；
其概率为 $6/36 = 1/6$ 【4 分】

b) 首先计算第一轮的得分期望值 $\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} ij[ij \le 20]$，其中

$$[ij \le 20] = \begin{cases} 1, ij \le 20 \\ 0, ij > 20 \end{cases}$$

计算该值为 $(\sum_1^3 i)(\sum_1^6 j) + 4(\sum_1^5 j) + 5(\sum_1^4 j) + 3(\sum_1^3 j) = 272$;

于是第一轮的得分期望为 $272/36 = 68/9$; 【4 分】

c) 令所求之游戏结束时得分的期望值为 S；注意到每一轮之后，若游戏未结束，以后得分的期望值也为 S，于是有

$$S = \frac{68}{9} + \frac{5}{6}S$$

可解得 $S = \frac{136}{3}$ 【4 分】

注：若列式正确，仅数值计算错误，每个错扣 1 分。

7. 对定义在集合 A、B 上的任意函数 f 问：

1. 请证明 $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$, 当 f 满足什么条件时，“=” 成立？请给出理由;
2. 请证明 $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

1. 首先，我们需要证明 $f(A){-}f(B) \subseteq f(A{-}B)$

   对于任意的元素 $y \in f(A){-}f(B)$，存在一个 $x \in A$，使得 $f(x) = y$。因为 $y \notin f(B)$，所以不存在任何元素 $b \in B$ 使得 $f(b) = y$。由于 $x \in A$，且 $x \notin B$（否则，$y = f(x) = f(b) \in f(B)$，与假设矛盾），所以 $x \in A{-}B$。因此，$y = f(x) \in f(A{-}B)$。这证明了 $f(A){-}f(B) \subseteq f(A{-}B)$。

   当 f 是一个单射（即任意不同的输入值对应着不同的输出值）时，”=” 成立。

   假设 f 是单射。我们需要证明 $f(A{-}B) \subseteq f(A){-}f(B)$。对于任意元素 $y \in f(A{-}B)$，存在一个 $x \in A{-}B$ 使得 $f(x) = y$。由于 $x \in A{-}B$，我们可以得到 $x \in A$ 且 $x \notin B$。因为 $x \in A$，所以 $y = f(x) \in f(A)$。另外，因为 $x \notin B$ 且 f 是单射，我们可以得到 $y \in f(B)$。所以，$y \in f(A){-}f(B)$。这证明了 $f(A{-}B) \subseteq f(A){-}f(B)$。

   所以，当 f 是单射时，$f(A){-}f(B) = f(A{-}B)$。

2. 我们需要证明 $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$。

   首先证明 $f^{-1}(A - B) \subseteq f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$:

   对于任意元素 $x \in f^{-1}(A{-}B)$，我们有 $f(x) \in A{-}B$。这意味着 $f(x) \in A$ 且 $f(x) \notin B$。由于 $f(x) \in A$，我们可以得到 $x \in f^{-1}(A)$。另一方面，因为 $f(x) \notin B$，我们可以得到 $x \notin f^{-1}(B)$。所以，$x \in f^{-1}(A){-}f^{-1}(B)$。这证明了 $f^{-1}(A - B)\ f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$。

   接下来证明 $f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A - B)$:

   对于任意元素 $x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$，我们有 $x \in f^{-1}(A)$ 且 $x \notin f^{-1}(B)$。因为 $x \in f^{-1}(A)$，我们可以得到 $f(x) \in A$。另一方面，因为 $x \notin f^{-1}(B)$，我们可以得到 $f(x) \notin B$。所以，$f(x) \in A - B$。这意味着 $x \in f^{-1}(A - B)$。这证明了 $f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A - B)$。

   因此，$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

8. 令 $S \neq \varnothing$ 与 A 均为集合，$\mathcal{P}(A)$ 表示 A 的幂集，问：

1. 令 $T_1 = \{Y \in \mathcal{P}(A) |$ 存在某些 $X \in S$，使得 $Y = A \cap X\}$，试证明一下等式（广义分配律）成立：$A \cap \bigcup S = \bigcup T_1$
2. 令 $T_1 = \{Y \in \mathcal{P}(A) |$ 存在某些 $X \in S$，使得 $Y = A - X\}$，试证明一下等式（广义德摩根律）成立：
   A-$\bigcup S = \bigcap T_2$
   A-$\bigcap S = \bigcup T_2$

a）解：

1. (1) $\Rightarrow$ 要证明 $A \cap \bigcup S \subset \bigcup T_1$
   $\forall a \in (A \cap \bigcup S)$，$a \in A$ $a \in \bigcup S$
   $\therefore \exists X \in S$ s.t. $a \in X$
   $\therefore a \in A \cap X$
   $\therefore \exists Y = A \cap X$ s.t. $a \in Y$
   $\because Y \in T_1$
   $\therefore Y \subset \bigcup T_1$
   $\therefore a \in \bigcup T_1$
   即 $\forall a \in (A \cap \bigcup S)$，$a \in \bigcup T_1$
   $\therefore A \cap \bigcup S \subset \bigcup T_1$

2. (2) $\Leftarrow$ 要证明 $\bigcup T_1 \subset A \cap \bigcup S$
   $\forall b \in \bigcup T_1$
   $\therefore \exists Y \in T_1$ s.t. $b \in Y$, $Y = A \cap X, X \in S$
   $\therefore b \in A \cap X$
   $\therefore b \in A$ $b \in X$
   $\because X \in S$
   $\therefore b \in \bigcup S$
   $\therefore b \in (A \cap \bigcup S)$
   即 $\forall b \in \bigcup T_1, b \in (A \cap \bigcup S)$
   $\therefore \bigcup T_1 \subset A \cap \bigcup S$

综上，$A \cap \bigcup S = \bigcup T_1$
b）解：

1. (1) $\Rightarrow$ 要证明 $A - \bigcap S \subset \bigcup T_2$
   $\forall a \in (A - \bigcap S)$，$a \in A$ $a \notin \bigcap S$
   $\therefore \forall X \in S$ s.t. $a \notin X$
   $\therefore \exists Y = A - X$ s.t. $a \in Y$
   $\because Y \in T_2$
   $\therefore a \in \bigcup T_2$
   即 $\forall a \in (A - \bigcap S), a \in \bigcup T_2$
   $\therefore A - \bigcap S \subset \bigcup T_2$

2. (2) $\Leftarrow$ 要证明 $\bigcup T_2 \subset A - \bigcap S$
   $\forall b \in \bigcup T_2$
   $\therefore \exists Y \in T_2$ s.t. $b \in Y$, $Y = A - X, X \in S$
   $\therefore b \in A - X$
   $\therefore b \in A$ $\forall X \in S, b \notin X$
   $\therefore b \in (A - \bigcup S)$
   即 $\forall b \in \bigcup T_2, b \in (A - \bigcap S)$
   $\therefore \bigcup T_2 \subset A - \bigcap S$

综上，$A - \bigcap S = \bigcup T_2$

9. 令 $A \neq \varnothing$,$Pt(A)$ 为 A 上所有划分构成的集合。$Pt(A)$ 上有一个二元关系 $\preccurlyeq$ 定义如下：$S_1 \preccurlyeq S_2$ 当且仅当对任意 $C \in S_1$，存在 $D \in S_2$ 令 $C \subseteq D$（当 $S_1 \preccurlyeq S_2$ 我们称 S_1 是 S_2 的加细）

1. 证明 $\preccurlyeq$ 是偏序
2. 令 $S_1, S_2 \in Pt(A)$, 证明 $\{S_1, S_2\}$ 有下确界
3. 令 $T \subseteq Pt(A)$。证明 $infT$ 存在。

1. 我们需要证明关系 $\preccurlyeq$ 满足自反性、反对称性和传递性。

   自反性：对于任意的 $S \in \mathrm{Pt}(A)$，显然对于所有 $C \in S$，我们有 $C \subseteq C$。所以，$S \preccurlyeq S$。

   反对称性：设 $S_1, S_2 \in \mathrm{Pt}(A)$ 且 $S_1 \preccurlyeq S_2$ 且 $S_2 \preccurlyeq S_1$。这意味着对于任意的 $C \in S_1$，存在 $D \in S_2$ 使得 $C \subseteq D$；同时，对于任意的 $D \in S_2$，存在 $C \in S_1$ 使得 $D \subseteq C$。由于 A 的划分是唯一的，我们可以得出 $S_1 = S_2$。

   传递性：设 $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Pt}(A)$ 且 $S_1 \preccurlyeq S_2$ 且 $S_2 \preccurlyeq S_3$。这意味着对于任意的 $C \in S_1$，存在 $D \in S_2$ 使得 $C \subseteq D$；对于任意的 $D \in S_2$，存在 $E \in S_3$ 使得 $D \subseteq E$。因此，对于任意的 $C \in S_1$，存在 $E \in S_3$ 使得 $C \subseteq D \subseteq E$。所以，$S_1 \preccurlyeq S_3$。

   综上所述，$\preccurlyeq$ 是一个偏序关系。

2. 令 $S_1, S_2 \in \mathrm{Pt}(A)$。定义 $S = C \cap D \mid C \in S_1$ 且 $D \in S_2$。为了证明 S 是 S_1 和 S_2 的下确界，我们需要证明两点：

   S 是一个划分：S 是 A 的划分，因为 S 中的每个非空子集都是 S_1 和 S_2 中的集合的交集，且 S 中的集合相互不相交。另外，S 中的集合并起来等于 A，因为 S_1 和 S_2 都是 A 的划分。

   对于任意的 $S' \in \mathrm{Pt}(A)$，如果 $S' \preccurlyeq S_1$ 且 $S' \preccurlyeq S_2$，那么 $S' \preccurlyeq S$。设 $C \in S'$，由于 $S' \preccurlyeq S_1$，存在 $C_1 \in S_1$ 使得 $C \subseteq C_1$。同样，由于 $S' \preccurlyeq S_2$，存在 $C_2 \in S_2$ 使得 $C \subseteq C_2$。因此，$C \subseteq C_1 \cap C_2$。由于 $C_1 \cap C_2 \in S$，我们得到 $S' \preccurlyeq S$。

   现在我们来讨论 E_S 与 E_{S_1} 和 E_{S_2} 的关系。E_S 是由划分 S 导出的等价关系。由于 S 是 S_1 和 S_2 的下确界，根据等价关系的定义，我们可以得出 $E_S = E_{S_1} \cap E_{S_2}$。换句话说，$E_S$ 是 E_{S_1} 和 E_{S_2} 的交集。

3. 令 $T \subseteq \mathrm{Pt}(A)$。我们需要证明 T 存在下确界。为了构造 T 的下确界，我们可以使用类似于 (b) 部分的方法。

   首先，定义 $S = \bigcap_{S_i \in T} S_i$。根据定义，$S$ 是 T 中所有划分的交集。我们需要证明 S 是一个划分以及 S 是 T 的下确界。

   S 是一个划分：S 是 A 的划分，因为 S 中的每个非空子集都是 T 中划分的集合的交集，且 S 中的集合相互不相交。另外，S 中的集合并起来等于 A，因为 T 中的每个划分都是 A 的划分。

   S 是 T 的下确界：对于任意的 $S' \in \mathrm{Pt}(A)$，如果 $S' \preccurlyeq S_i$ 对于所有 $S_i \in T$，那么 $S' \preccurlyeq S$。设 $C \in S'$，由于 $S' \preccurlyeq S_i$ 对于所有 $S_i \in T$，存在 $C_i \in S_i$ 使得 $C \subseteq C_i$。因此，$C \subseteq \bigcap_{S_i \in T} C_i$。由于 $\bigcap_{S_i \in T} C_i \in S$，我们得到 $S' \preccurlyeq S$。

   综上所述，T 存在下确界 S。