离散数学-图论作业 8 树的基本概念

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

计算下列各题:

1) 有多少非同构的 4 个顶点的树?

2) 饱和碳氢化合物 C_4H_{10} 有多少不同的同分异构体?

3) 有多少由 4 个不可区分的顶点构成的二叉树?

4) K_4 有多少个不同的生成树?（假设每个顶点有唯一标号）

答案:

1) 2

2) 2

3) 14

4) 16 （6 选 3=20，减去 4 个不连通的）

Problem 2

证明或反驳：若 G 是最大度大于等于 k 的树，则 G 至少有 k 个顶点度数为 1。

答案: 反证法: 若 G 中度为 1 的顶点个数 s 小于 k, 则 $2\epsilon = \sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i) \geq 2[|G|-(s+1)]+k+s \geq 2|G|-1$, 与 $\epsilon = |G|-1$ 矛盾

Problem 3

证明或反驳：所有边数不超过图 G 的最小顶点度的树都与图 G 的某个子图同构（只考虑简单图）。

答案: 对树的边数 k 进行归纳:

$k=1$ 时，T 是 K2，G 最小度至少为 1，因此一定有一个 K2 子图

$k=2$ 时，T 是三个顶点依次连接的一条无环路径，G 最小度至少为 2，至少有三个顶点，一定有一个子图满足

假设对于边数为 $k-1(k \geq 3)$ 的每个树 T'，以及最小度至少为 $k-1$ 的每个图 G'，T' 同构于 G' 的某个子图。

对于边数等于 k 的树 T，设 v 是 T 的一个叶子节点，u 是 T 中与 v 邻接的顶点，则 $T-v$ 是边数为 $k-1$ 的树，因为 G 的最小度至少为 k，因此也满足最小度至少为 k-1，由归纳假设知，$T-v$ 一定同构 G 的某个子图 F。

设 u' 是与 T 中 u 对应的 F 中的顶点，由于 u' 在原图 G 中的度数大于等于 k，因此 u' 一定连接到 G 中某个不属于 F 的顶点 w，因此 T 同构于 F 加上顶点 w 和 wu' 这个子图

Problem 4

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。
用集合 $\{0,1,2\}$ 里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种？用集合 $\{0,1,2,3\}$ 里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种？

答案： 三顶点树的只有 S_2 一种结构 (即 $K_{1,2}$)，两个树不同构仅当度为 2 的点标记不同，共有 3 个不同的标记树；

四顶点树有 S_3 和 P_4 两种情况，S_3 有 4 个不同的标记树，P_4 下 4 的全排列中有且仅有互为逆序的在同构下等价，共 $\frac{A(4)}{2} = 12$ 个不同的标记树，共计 16 个不同的标记树。

Problem 5

令 $D = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 为一正整数序列，且 $n \geq 2$。

a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

答案：

a) 树 T 的边的数目为 $n-1$。由握手定理可知 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

b) 对 n 进行归纳。

基础步骤： 当 $n = 2$ 时该命题显然成立。

递归步骤： 假设对于 $2 \leq n = k-1$ 时该命题成立。现证明该命题对 $n = k$ 时也成立。D 中必存在 $d_i = 1$（否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$）；亦必有 $d_j > 1$（否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i < 2(n-1)$）。考虑 $D' = (D - \{d_i, d_j\})\ \{d_j - 1\}$，易见 D' 满足归纳假设条件，即存在一颗树 T 的各个顶点的度数序列恰是 D'。今在 T 中添加一个节点，并将其连接到对应于 $d_j - 1$ 的节点上。易见 D 恰好是这个新的树的顶点的度数序列。