离散数学-图论作业 6 最短通路

Problem 1

以下是 *Dijkstra* 算法的一个实现：

Algorithm 1 Dijkstra 算法

1: **procedure** DIJKSTRA(G: 所有权都为正数的带权连通简单图) {G 有顶点 $a = v_1, v_2, ..., z = v_n$，相应边上的权值为 $w(v_i, v_j)$}
2:     **for** $i := 1$ **to** n **do**
3:         $L(v_i) := \infty$
4:     $L(a) := 0$
5:     $S := \emptyset$
6:     **while** $z \notin S$ **do**
7:         $u :=$ 不属于 S 的 $L(u)$ 最小的一个顶点
8:         $S := S \cup \{u\}$
9:         **for** 所有不属于 S 的且属于 $N(u)$ 的顶点 v **do**
10:             $L(v) := \min\{L(v), L(u) + w(u, v)\}$
    {向 S 中添加带最小标记的顶点，并且更新不在 S 中的顶点的标记}
11: **return** $L(z)$ {$L(z) =$ 从 a 到 z 的最短通路的长度}

证明：*Dijkstra* 算法第 8 行每次更新 S 时，当前的 L 对于要加入的 u 都满足 $L(u)$ 等于 a 到 u 最短路的权值。

答案： 对 S 中的点按加入顺序排列，对 S 的规模进行归纳基础步骤：当 S 为空时命题成立对于任意 a 到 u 最短的的通路，考虑通路上 u 之前的最后一个点 v，

- 若 $v \in S$，由归纳假设 $L(v)$ 表示 a 到 v 的最短通路长度，因为 u 在加入前不属于 S 且属于 $N(v)$，所以由 9、10 行得到 $L(u) \le L(v) + w(u, v)$，于是 $L(u)$ 等于该通路的长度。
- 若 $v \notin S$，取该通路上第一个不属于 S 的点 w，由上一情况知 $L(w)$ 是 a 到 w 最短通路的长度，因为 u 是这样的点中 L 最小的，所以 $L(u) \le L(w)$，又因为所有边的权值非负，a 经过 w 到达 v 再到 u 的通路权值不可能比 $L(w)$ 更小，得证。

Problem 2

下面是 *Floyd* 算法的一个实现，它求出了任意点对间所有边权的和最小的通路的长度，请尝试修改该算法中相应的行，解决下问题（无需证明修改的正确性）：

Algorithm 2 Floyd 算法

```
1: procedure FLOYD(G: 带权简单图) {G 有顶点 v_1, v_2, ..., v_n，相应边上的权值为 w(v_i, v_j)}
2:     for i := 1 to n do
3:         for j := 1 to n do
4:             if (v_i, v_j) ∈ E(G) then
5:                 d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)
6:             else
7:                 d(v_i, v_j) := ∞
8:     for i := 1 to n do
9:         for j := 1 to n do
10:            for k := 1 to n do
11:                if d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k) then
12:                    d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)
    {d(v_i, v_j) 是在 v_i 与 v_j 之间的最短通路的长度，为 ∞ 时表示通路不存在}
```

a) 对于任意边权大于 1 的图 G，对于任意点对 a, z，试求 a 到 z 的通路上所有边的权值乘积最小可以是多少;，下同）

b) 定义一条通路的“强度”为通路上权最小的边的权值（例如，由权值依次为 $3, 5, -2, 1$ 的边组成的通路强度为 -2），对于任意点对 a, z，试求 a 到 z 的最强的通路的强度可以是多少。

答案： 根据代数结构修改相应的操作即可：

a) 更新步骤 (line 11)：$d(v_j, v_i) \cdot d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$
更新步骤 (line 12)：$d(v_j, v_k) = d(v_j, v_i) \cdot d(v_i, v_k)$

b) 初始化 (line 7)：$d(v_i, v_j) = -\infty$
更新步骤 (line 11)：$\min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\} > d(v_j, v_k)$
更新步骤 (line 12)：$d(v_j, v_k) = \min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\}$

Problem 3

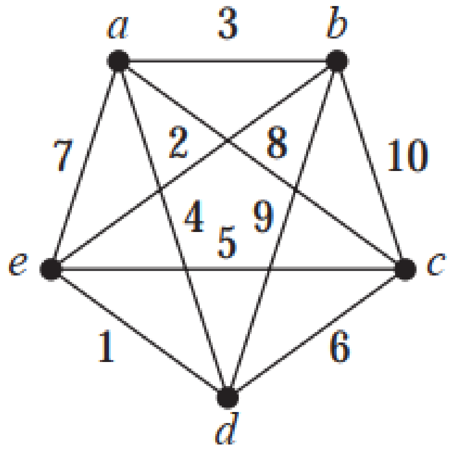
若边的权可以为负数，*Dijkstra* 算法能否正确求出最短路？若可以，请给出证明；若不能，请举出一个反例并分析说明。

答案： 不能，考虑 $V = \{a, b, c, d\}, E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (d, c)\}, W(a, b) = 6, W(a, c) = 4, W(a, d) = 5, W(b, d) = -8, W(d, c) = 2$，从 a 出发使用 *Dijkstra* 算法会在第一次迭代中认定 $dist(a, c) = 4$，而路径

$a \to b \to d \to c$ 的权值和为 0。

Problem 4

基于所有哈密顿回路的权值选择出总权值最小的回路来解决下图的旅行商问题。(注:ad=4,bd=9,be=2,ac=8,ec=5。需要给出总权值最小的回路和其权值,若答案不唯一,需全部写出)



答案: abedca,权值为 20;abecda,权值为 20。

Problem 5

证明或反驳:对于权值为正的简单连通图 G,在已知图上任意两点间最短路长度的前提下,可以构建出 G。

答案: 反驳:$V = \{a, b, c\}, E = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}, E' = \{(a, b), (b, c)\}, W(a, b) = 1, W(b, c) = 1, W(a, c) = 2$。$E$ 和 E' 是不可区分的。

Problem 6

描述如何调用已知的求两点间最短通路长度的算法解决下列求简单加权(权均为正数)连通图上的有限制的最短通路长度问题:

a) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j,且经过顶点 v_k 的最短通路长度(为保证通路最短,可以经过同一个顶点多次);

b) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j,且不经过顶点 v_k 的最短通路长度;

c) 求从顶点 v_i 出发,先经过顶点 v_k,再到达顶点 v_j 的最短通路长度(即在到达 v_k 前不得经过顶点 v_j);

答案:

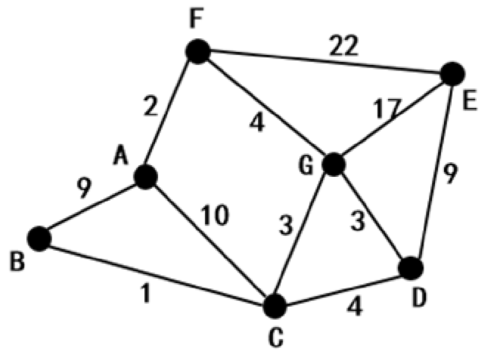
a) 先求出 v_i 到达 v_k 的最短通路长度,再求出 v_k 到达 v_j 的最短通路长度,两者相加即可;

b) 将原图中顶点 v_k 及其相关的边删除，之后再执行已有最短路算法直接求 v_i 到达 v_j 的最短通路长度；

c) 先求出 v_k 到达 v_j 的最短通路长度，再删除顶点 v_j 及其相关的边，求出 v_i 到达 v_k 的最短通路长度，两者相加即可；

Problem 7

求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路径。



答案：

$$dis(A,B) = dist(P(A \to B)) = 9$$

$$dis(A,C) = dist(P(A \to F \to G \to C)) = 9$$

$$dis(A,D) = dist(P(A \to F \to G \to D)) = 9$$

$$dis(A,E) = dist(P(A \to F \to G \to D \to E)) = 18$$

$$dis(A,F) = dist(P(A \to F)) = 2$$

$$dis(A,G) = dist(P(A \to F \to G)) = 6$$