离散数学-图论作业 5 哈密尔顿图

Problem 1

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路?

答案: $m = n \geq 2$ ，$m = 0$ 且 $n = 1$，$m = 1$ 且 $n = 0$

Problem 2

证明或反驳: 若 G 不是 2-连通图，则 G 不是哈密尔顿图

答案: 证明：破坏哈密尔顿图的必要条件：去掉 |S| 个点，G-S 的连通分支数小于等于 |S|。非 2-连通图存在割点，去掉一个点得到至少两个连通分支。

Problem 3

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H 图，那么必有偶数个顶点

答案: 由于图 G 的边全部在二部图的左右两边（X,Y）之间，如果 G 有哈密尔顿圈 C，则 G 中所有顶点全在 C 上，且必定是 X 的点和 Y 的点交替在 C 上出现，因此 G 必有偶数个顶点

Problem 4

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，证明或反驳:

a) G 一定存在哈密尔顿回路。

b) G 一定存在哈密尔顿通路。

答案:

a) 反驳，考虑两个通过割点相连的 K_3。

b) 证明，根据 Ore 定理的推论，对 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足 $d(u) + d(v) \geq n - 1$，因此 G 一定存在哈密尔顿通路。

Problem 5

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

答案： 设 G 为具有 11 个顶点的图，每个顶点对应于一门课程考试，如果这两个顶点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个顶点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不超过 6，故每个顶点的度数至少是 5，任两个不相邻结点的度数之和至少是 10，根据 Ore 定理的推论，G 总是包含一条哈密尔顿通路，得证。

Problem 6

考虑 $M \times N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G。

a) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，给出一种哈密尔顿回路的构造方法。

b) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密尔顿回路。

答案：

a) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，有如下方法 $f : M \times N -> M \times N$ 可生成回路:

设当前位置为 (i, j)，回路中下一个点的位置为 $f(i, j)$

if $i = 1 \wedge j \leq N$ **then**
  $f(i, j) = (i, j + 1)$
else if $2|j$ **then**
  if $i < N$ **then**
    $f(i, j) = (i + 1, j)$
  else
    $f(i, j) = (i, j - 1)$
else
  if $j > 1 \wedge i > 2$ **then**
    $f(i, j) = (i - 1, j)$
  else
    $f(i, j) = (i, j - 1)$

所得回路：$(1, 1) \to (1, 2) \to \ldots \to (1, N) \to (2, N) \to \ldots \to (M, N) \to (M, N - 1) \to (M - 1, N - 1) \to \ldots \to (2, N - 1) \to (2, N - 2) \to \ldots \to (M, 2) \to (M, 1) \to \ldots \to (2, 1) \to (1, 1)$

b) 证明：不妨记图中顶点为 $V = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, N), (2, 1), \ldots, (M, N)\}$。当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，总方格数为奇数。令 $g(i, j) = (2|i) \oplus (2|j)$（异或），易见每条边的两个端点 g 值都不同。假设存在 G 的哈密尔顿回路 H，删去其第一条边可得哈密尔顿通路 H'，H' 上点的序列中 g 的值都是 $True, False$ 交错出现的，由 G 有奇数个点知 H' 起点和终点的 g 值必相同，即它们之间无边，矛盾。

Problem 7

简单图 G 满足 $|G|>2$，令 m 为 G 的边数，n 为 G 的顶点数。试证明：如果 $m>C_{n-1}^2+1$，则 G 一定存在哈密尔顿回路。（提示：可使用数学归纳法证明）

答案：

Basis $n=3$ 时，结论显然成立。

I.H. 假设 $n<k$ 时 G 存在哈密尔顿回路。

I.S. 当 $n=k$ 时，G 的补图 $\bar{G}$ 的边数 $|E(\bar{G})|<C_n^2-C_{n-1}^2-1=n-2$, 这就意味着 $\bar{G}$ 至少有一个节点的度数为 0 或 1。不妨设这个节点为 v。

A 度数为 1 的情况：$d(v)=n-2$，在 G 中删除 v 后得到 G'，此时 G' 的边数满足归纳条件足 $|E(G')|>C_{n-2}^2+1$，存在哈密尔顿回路 C。由于 v 跟 G' 中 $n-2$ 个顶点相连，总可以取其中的在 C 中相邻的顶点 u 和 w，将 $u-w$ 改成 $u-v-w$ 便得到 G 上的哈密尔顿回路。

B 度数为 0 的情况：$d(v)=n-1$。在图 G 中删除 v 得到 G'，下面对 G' 分情况讨论 (注意 G' 有 $n-1$ 个顶点)：

(1) 如果 G' 是完全图，G' 一定存在哈密尔顿回路。由于 v 与 G' 中的点均相连，不妨取其中的相邻的顶点 u 和 w，将 $u-w$ 改成 $u-v-w$ 便得到 G 上的哈密尔顿回路。

(2) 如果 G' 不是完全图，我们向其中加入一条边 e，对于 $G'+\{e\}$ 满足 $|E(G'+\{e\})|>C_{n-1}^2+1-(n-1)+1=C_{n-2}^2+1$，由归纳假设，$G'+\{e\}$ 中存在哈密尔顿回路。不妨设此回路为 C：

a) 如果 C 中不包含 e，则我们可以通过 (1) 的方式获得 G 的哈密尔顿回路；

b) 如果 C 中包含 e，将 e 从 C 中删除得到一条哈密尔顿通路，类似的，将 v 和 e 的两个端点相连便是一条哈密尔顿回路。