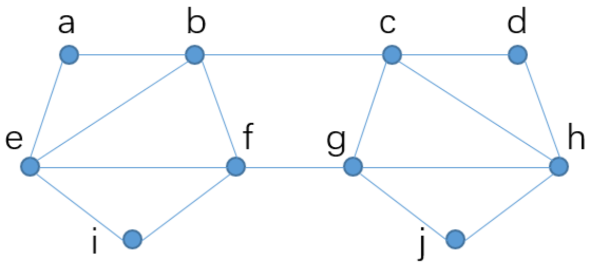
离散数学-图论作业 4 欧拉图

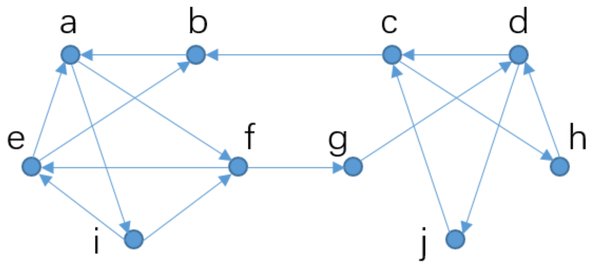
如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。



(1)



(2)

答案：

(1) 存在欧拉回路，任意顶点出发均可，例如 a->b->c->d->h->j->g->h->c->g->f->i->e->b->f->e->a，注意回路需经过 16 条边。

(2) 不存在欧拉回路，存在欧拉通路，仅可从 i 出发以 b 结束，例如 i->e->a->i->f->e->b->a->f->g->d->c->h->d->j->c->b，注意回路需经过 16 条边。

Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

1) 欧拉回路？　　　　2) 欧拉通路？

答案：

1) 欧拉回路：m 和 n 均为偶数

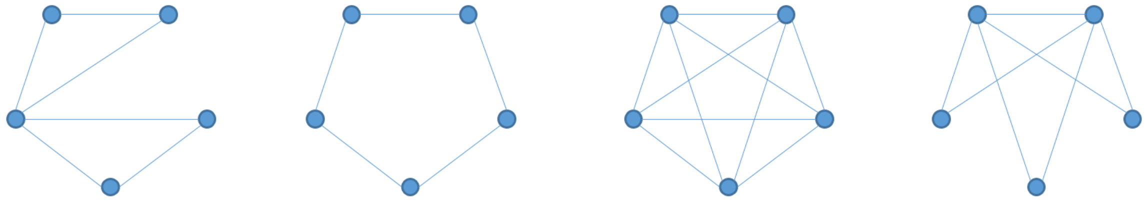
2) 欧拉通路：

- m 和 n 均为偶数;
- m 与 n 中一个为奇数，另一个为 2;
- m 和 n 均为 1。

Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。

答案：



Problem 4

证明或反驳：若无向简单图 G_1 和 G_2 是顶点数、边数均相等的欧拉图，则 G_1 和 G_2 同构。

答案： 反驳：例如 G_1 为 C_3 和 C_5 共用一个顶点构成的图，G_2 为 C_4 和 C_4 共用一个顶点构成的图，G_1 和 G_2 均有 7 个顶点 8 条边且均为欧拉图，但不同构。

Problem 5

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。

2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中不存在欧拉通路。

答案：

1) 证明：当 G 有奇数个顶点时，若 G 有欧拉通路，则 G 有 2 个（或 0 个）奇数度顶点，其他顶点的度均为偶数。则补图 $\bar{G}$ 中也只有 2 个（或 0 个）奇数度顶点，其他顶点度均为偶数。因此若 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 存在欧拉通路。

2) 反驳：当 G 为 4 个顶点构成的简单通路时，G 和 $\bar{G}$ 均存在欧拉通路。

Problem 6

给定无向简单图 G（$|G| \geq 3$），定义线图 $L(G)$ 如下：

- 对 G 中的每条边，$L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应；
- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明若 G 是简单、连通的 r-正则图，则 $L(G)$ 是欧拉图。

答案: 先证明 $L(G)$ 是连通的: 对于任意的 e_1, e_2, 分别取它们的端点 u_1, u_2, 由 G 的连通性知存在 $Path(u_1, u_2)$, 因此存在路 $e_1, Path(u_1, u_2), e_2$，其上边都是相邻的，因此 $L(G)$ 中 e_1, e_2 是连通的。
再证明 $L(G)$ 每个点的度都是偶数：对于任意 e_0，考虑 e_0 的端点 u, v 及对应边集 $E_G(u) = \{e \in E(G) | u \in e\}, E_G(v) = \{e \in E(G) | v \in e\}$。因为 G 是 r- 正则的，所以 $|E_G(u)| = |E_G(v)| = r$，由 G 是简单图，得 $E_G(u) \cap E_G(v) = \{e_0\}$，于是在 $L(G)$ 中 $\deg(e_0) = |N_{L(G)}(e_0)| = |E_G(u) \cup E_G(v)| - 1 = 2(r-1)$。
综上，$L(G)$ 是欧拉图。

Problem 7

友谊图：简单图 F 满足 $V(F) > 2$ 且对于任意 $u, v \in V(F)$, u, v 有且仅有一个共同的相邻节点（两个人只有唯一的共同的朋友），则称 F 是友谊图。

试证明：友谊图一定是欧拉图。

答案: 考虑友谊图 F 上任意的边 $e = (u, v)$，e 的两个端点 u, v 有唯一的共同相邻节点 w，即 F 上的每个边 (u, v) 都唯一的对应相应的 $(u, v), (u, w), (v, w)$ 三条边构成的一个 K_3 子图。并且，由于每条边 e 对应的共同相邻节点只能有一个，$(u, w), (v, w)$ 对应的必然也只能是 $(u, v), (u, w), (v, w)$。因此，累积所有边对图上顶点度的贡献，等同于累积所有这样的 K_3 子图的贡献，而这样的三条边对所有点的度数贡献均为 0 或 2。于是所有点的度必然是偶数，即 F 是欧拉图。