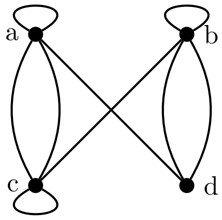
离散数学-图论作业 2 图的表示与图同构

Problem 1

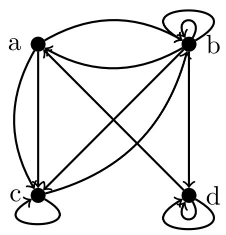
用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

答案：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Problem 2

1) 对下面两个简单图，先写出图的邻接矩阵 A，关联矩阵 B，然后计算矩阵 $D = BB^{\mathrm{T}} - A$。

a) $K_{3,2}$　　　　b) $\overline{K_{2,3}}$

2) D 与原来的图什么关系？试解释其原因。（D 是该图的什么矩阵?）

答案：

1. 因为点和边没有顺序，矩阵的行列可能有变化，批改时请注意

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

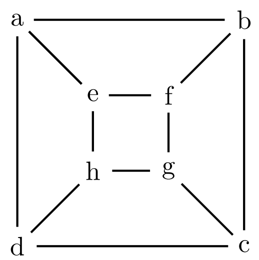
b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

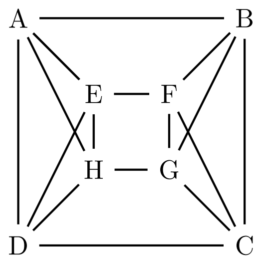
2. D 是图的度矩阵。因为 $B_{i,k}B^{\mathrm{T}}_{k,j} = 1$ iff $i \in k \wedge j \in k$，于是

$$BB^{\mathrm{T}}[i,j] = \begin{cases} \sum_{k \in E(G)} \{b_{i,k} b_{i,k}\} = |\{k \in E(G) | i \in k\}| = \deg(i) & i = j \\ \sum_{k \in E(G)} \{b_{i,k} b_{j,k}\} = |\{k \in E(G) | i \in k \wedge j \in k\}| = a_{i,j} & i \neq j \end{cases}$$

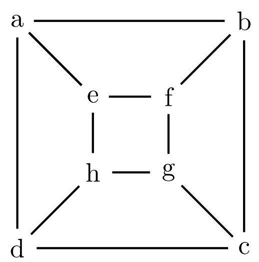
Problem 3

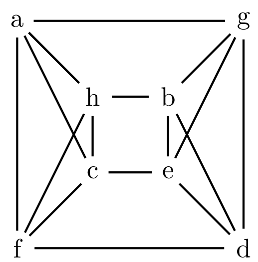
证明 [下左图] 和 [下右图的补图] 同构。





答案： 对应关系如图所示





Problem 4

具有 4 个顶点的非同构简单图中，有多少个

1) 包含 C_3?

2) 无孤立点?

3) 是二部图?

答案：

1) 4

2) 7

3) 7

Problem 5

若简单图 G 与 $\bar{G}$ 是同构的，则 G 称为**自补图**
试证明：若图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{V} \equiv 0, 1\,(mod 4)$。

答案： 因为 G 是自补图，所以 G 和 $\bar{G}$ 的边数相等，$\mathcal{E}_G + \mathcal{E}_{\bar{G}} = \frac{\mathcal{V}(\mathcal{V}-1)}{2}$，则 $\mathcal{E}_G = \frac{\mathcal{V}(\mathcal{V}-1)}{4}$，

因为边数只能是整数，所以要么 $\mathcal{V} \equiv 0\,(mod 4)$ 要么 $(\mathcal{V}-1) \equiv 0\,(mod 4)$。

综上得证。

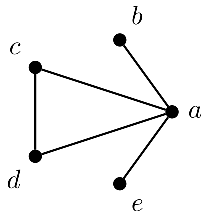
Problem 6

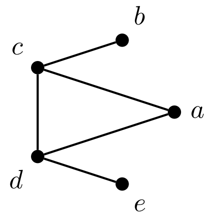
对以下每组同构不变量的值找出一对不同构的图

1) 顶点数 =5，边数 =5，且子图中最大的完全图是 K_3

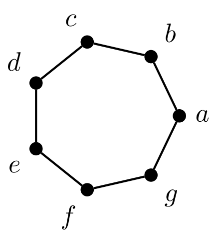
2) 度序列是 (2,2,2,2,2,2,2)

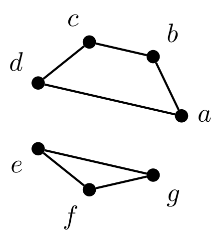
答案：





1)





2)

答案可能不唯一

Problem 7

G 的围长是指 G 中最短回路的长；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大。
证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

答案： 设 u, v 是 G 中相邻顶点，$N(u)$ 和 $N(v)$ 分别代表 u 和 v 的邻居构成的集合，则 $N(u)$ 和 $N(v)$ 不相交，否则 G 的围长为 3，产生矛盾。因此，G 至少有 $2(k-1)+2$ 个顶点。

因为是 k 正则图，每个顶点应该连接 k 个顶点，易知 $N(u)$ 和 $N(v)$ 内部不能相连，否则围长为 3, 因此将 $N(u) \setminus \{v\}$ 中的 k-1 个顶点分别和 $N(v) \setminus \{u\}$ 中的 k-1 个顶点相连，这样每个顶点的度数都为 k，即可得到 $2k$ 个顶点的围长为 4 的图，此时 G-u,v 是一个完全二部图，这样的图（在同构意义下）只有一个，加上 u,v 后在同构意义下依然唯一。