离散数学-图论作业 1 图的基本概念

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图。

Problem 1

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

答案： 证明：反证法。假设图 G 为 n 个顶点的简单图，由于 G 各个顶点度数均不相同，则 G 的度序列为 $n-1$, $n-2$, ..., 1, 0。其中度数为 $n-1$ 的顶点与其他所有顶点相连，与存在度为 0 的顶点矛盾。因此 G 不是简单图。

Problem 2

令 G 是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳

a) 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加

b) 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少

答案:

a) 成立，假设原图平均度数为 θ，顶点数为 n，最大度为 x，修改后的图平均度为 θ'，顶点数为 $n-1$，去掉度最大的顶点后，因为一条边关联两个顶点，所以原图损失了 2x 的总度数，有 $(n-1)\theta' + 2x = n\theta$，即 $\theta - \theta' = \frac{2x-\theta}{n-1}$，因为 $2x - \theta \geq 0$，所以 $\theta - \theta' \geq 0$，即 $\theta' \leq \theta$，原图的平均度不会增加

b) 不成立，对一个完全图，原图所有顶点的度数都等于 n-1，删掉一个顶点后，其余顶点的度数都变成 n-2，平均度减小。

Problem 3

度序列： 一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（书 P.561）
判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

a) 7,6,5,4,3,2,1,0

b) 3,3,3,3

c) 5,4,2,1,1,1

d) 5,4,3,2,2

答案：

a) 没有，8 个顶点有一个顶点度为 7，与每个顶点都相连，而有一个顶点度为 0

b) 有，K_4。（有多种答案）

c) 没有。前两个顶点度数和为 9，去掉这两个顶点之间的一条边，剩余度为 7；而后四个顶点度数和为 5，因此不能构成简单图。

d) 没有，顶点数为 5 的简单图最大度不会超过 4

Problem 4

设无向图 G 有 $\mathcal{V}$ 个顶点，$\mathcal{E}$ 条边，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度，证明 $\delta(G) \le \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \le \Delta(G)$。（其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**）

答案： $\forall v \in V.\delta(G) \le deg(v) \le \Delta(G)$，对所有的顶点求和可得 $\mathcal{V} \cdot \delta(G) \le 2\mathcal{E} \le \mathcal{V} \cdot \Delta(G)$，各项均除以 $\mathcal{V}$ 即可得证。

Problem 5

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图。

a) 证明：G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a，当且仅当 $deg(x) \le \frac{a}{2}$；

b) 证明或反驳：如果 $a > 0$，那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

答案：记图 G 有 $\mathcal{V}$ 个顶点，$\mathcal{E}$ 条边。

a) 记删顶点 x 得到的新图 $G' = (V', E')$，由题意有 $|V'| = \mathcal{V} - 1, |E'| = \mathcal{E} - deg(x)$。
解

$$\frac{2|E'|}{|V'|} = \frac{2\left(\mathcal{E} - \deg(x)\right)}{\mathcal{V} - 1} \ge a$$

得 $deg(x) \le \mathcal{E} - \frac{a}{2}(\mathcal{V} - 1)$，将 $a = \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 代入得 $deg(x) \le \mathcal{E}(1 - \frac{\mathcal{V}-1}{\mathcal{V}}) = \frac{a}{2}$

b) 显然 $\mathcal{V} > 1$(否则 $a = 0$)，对 $\mathcal{V}$ 做归纳

Basis. $\mathcal{V} = 2$ 时，只有 K_2 能使 $a = 1 > 0$，取 K_2 本身即可；

I.H. $\mathcal{V} = n$ 时题设成立；

I.S. $\mathcal{V} = n+1$ 时

Case 1. 若 $\delta(G) \le \frac{a}{2}$，考虑 G 删去一个最小度顶点得到的子图 G'，则由 a) 知 G' 的顶点平均度至少为 a，由归纳假设知存在一个 G' 的子图 G'' 最小度大于 $\frac{a}{2}$，G'' 即为所求；

Case 2. 否则 $\delta(G) > \frac{a}{2}$，G 本身即为满足题设要求的子图。

Problem 6

有 n 支球队 $(n \ge 4)$，已经比赛完了 n+1 场，证明一定有一个球队比赛了至少 3 场

答案： 如果没有球队比赛了至少三场，那么每支球队最多比赛两场，把球队看作顶点，一场比赛看作一条边，每只球队度数最多为 2，图的总度数等于边数的两倍，即最多有 n 次比赛，与假设矛盾

Problem 7

证明：不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图，其边数 m 必满足 $m \le \frac{n^2}{4}$。

答案： 取一个度最大的顶点 u，$N(u)$ 中顶点两两之间无边（否则构成 K_3），顶点的度不会超过 $n - \Delta(G)$。于是

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} deg(v) =& 1 \cdot \Delta(G) + \sum_{v \in N(u)} deg(v) + \sum_{v \in (V(G) \setminus N(u))} deg(v) \\
\le& \Delta(G) + \Delta(G)(n - \Delta(G)) + (n - \Delta(G) - 1)\Delta(G) \\
=& 2(n - \Delta(G))\Delta(G) \\
\le& 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

于是 $m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} deg(v) \le \frac{n^2}{4}$。