作业 20–布尔代数引论参考答案

Problem 1

设 B 是布尔代数，B 中的表达式 f 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

(1) 化简 f;

(2) 求 f 的对偶式 f^*.

解：

(1)

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee ((a \wedge b) \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\ &= b \wedge (a \vee c)\end{aligned}$$

(2) $b \vee (a \wedge c)$

Problem 2

在布尔代数中, 证明:

(1) $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$;

(2) $\forall a, b \in B(a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a')$, 其中 a' 表示 a 的补元.

解：

(1) 先证 $a \preceq b \Rightarrow a \wedge b' = 0$：

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Rightarrow a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0$$

再证 $a \wedge b' = 0 \Rightarrow a' \vee b = 1$：

$$a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow (a \wedge b')' = 1 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$$

最后证 $a' \vee b = 1 \Rightarrow a \preceq b$：

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \Leftrightarrow a \preceq b$$

(2) 对任意 $a, b \in B$ 有

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a' \vee b' = a' (\text{德摩根律}) \Leftrightarrow b' \preceq a'$$

或者

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow (a \wedge b)' = a \Leftrightarrow a' \vee b' = a' \Leftrightarrow b' \preceq a'$$

Problem 3

设 $< B, \wedge, \vee, \ ' , 0, 1 >$ 是布尔代数, 在 B 上定义二元运算 $\oplus$, $\forall x, y \in B$ 有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

请回答：

(1) $< B, \oplus >$ 能否构成代数系统？

(2) B 在 $\oplus$ 下是否有单位元？有哪些元素有逆元？

解：

(1) 能，在 B 中 $\oplus$ 显然是封闭的。

(2) 0 是单位元，所有元素 $x \in B$ 都有逆元，逆元是 x 本身。

Problem 4

设 B 是布尔代数, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in B$, 证明:

(1) $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_n'$

(2) $(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \cdots \vee a_n'$

解:

(1) 对 n 进行归纳. 当 $n = 2$ 时是德摩根律。
假设对于 $n = k$ 命题为真，则

$$\begin{aligned}
(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{k+1})' &= ((a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \vee a_{k+1})' \\
&= (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k)' \wedge a_{k+1}' \\
&= (a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k') \wedge a_{k+1}' \\
&= a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k' \wedge a_{k+1}'
\end{aligned}$$

(2) 与 (1) 类似.

Problem 5

设 B_1, B_2, B_3 是布尔代数, 证明: 若 B_1 到 B_2, B_2 到 B_3 均存在同构映射（同态映射且为双射）, 则 B_1 到 B_3 也存在同构映射.

解:

由题假设存在同构映射 $f : B_1 \to B_2$, $g : B_2 \to B_3$, 因此 $f \circ g : B_1 \to B_3$ 也是双射. 下面证明 $f \circ g$ 是同态映射. $\forall x, y \in B_1$,

$$f \circ g(x \wedge y) = g(f(x \wedge y)) = g(f(x) \wedge f(y)) = g(f(x)) \wedge g(f(y)) = f \circ g(x) \wedge f \circ g(y)$$

$$f \circ g(x') = g(f(x')) = g(f(x)') = g(f(x))' = f \circ g(x)'$$

因此 $f \circ g$ 是 B_1 到 B_3 的同态映射，由 $f \circ g$ 是双射知 $f \circ g$ 也为同构映射.

Problem 6

今有 x, y, z 三个布尔变元，用 xyz 表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F：当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x,y,z)=1$，否则 $F(x,y,z)=0$。

(1) 给出 F 的真值表。

(2) 以 “布尔积之布尔和” 的形式给出 F 的表达式（无需化简）。

(3) 化简该表达式。

解：

(1) 真值表为

$F(0,0,0)$	0
$F(0,0,1)$	1
$F(0,1,0)$	1
$F(0,1,1)$	1
$F(1,0,0)$	0
$F(1,0,1)$	1
$F(1,1,0)$	0
$F(1,1,1)$	0

(2) $F = x'y'z + x'yz' + x'yz + xy'z$

(3) $F = y'z + x'y.$

Problem 7

在布尔代数中，对一个包含若干运算（不一定为二元运算）的集合 S，若任意 n 元布尔函数都可以使用仅包含 S 中运算的 n 元布尔表达式表出，称 S 是 “完备集”。请证明：

(1) $S = \{\wedge,\ \vee,\ '\}$ 是完备集，其中 $'$ 为补运算；

(2) $S = \{\wedge,\ \vee\}$ 不是完备集；

(3) 存在基数为 1 的完备集。

解：

(1) 任意 n 元布尔函数都可以作出真值表。对于真值表中每个使得函数值为 1 的行，用 $'$ 修饰这一行中取值为 0 的变量，再用 $\wedge$ 将所有变量连接，可以得到一条表达式；将所有这样的表达式用 $\vee$ 连接，即可得到和原布尔函数等价的表达式（析取范式），因此 $S = \{\wedge,\ \vee,\ '\}$ 是完备集。

(2) 一元布尔函数 $f(x) = 0$ 无法表示，因此 $S = \{\wedge,\ \vee\}$ 不是完备集。

(3) 可以定义二元运算 $\downarrow$(NOR)：$0 \downarrow 0 = 1$，其余时候为 0，可以证明 $x' = x \downarrow x$，$x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$，$x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$，并利用第一问结论。类似地也可以定义二元运算 NAND 并验证。

Problem 8

在布尔代数中，

- 对一条布尔表达式 A，可以通过对每一步运算增加括号，使其具有唯一明确的运算顺序，例如

$$x \vee y \wedge z \vee w = (x \vee (y \wedge z)) \vee w$$

  在这样的表达式中，若将 $\wedge$ 和 $\vee$ 互换，将 0 和 1 互换，得到的表达式称为 A 的“对偶式”，记为 A^*；

- 对一条布尔表达式 A，记 v 为一种赋值方案，对出现在 A 中的所有变量确定一个真值，并记 $v(A)$ 为对表达式 A 使用方案 v 进行赋值后表达式的值。对一种赋值方案 v，记 v' 为其相反（互补）赋值，即：v' 将 v 中赋值为 0 的变量赋值为 1，反之亦然。

请证明：

(1) 若 A 和 A^* 互为对偶式，同时 v 和 v' 互为相反赋值，则 $v(A^*) = (v'(A))'$；（提示：用数学归纳法）

(2) 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。（提示：用上一题的结论）

解：

(1) 对表达式的运算符号个数 n 用数学归纳法。

- 当 $n=1$ 时结论显然成立；
- 假设当 $n \leq k$ 时结论成立，即对任意含不超过 k 个运算符号的布尔表达式 A 和任意赋值 v 都有 $v(A^*) = (v'(A))'$。

  当 $n=k+1$ 时，对任意含 $k+1$ 个运算符号的布尔表达式 A，不妨假设参与第一步运算的变量为 x 和 y。先假设 A 的第一步运算为 $x \wedge y$，构造一个新的布尔表达式 B，将 A 中第一步运算的 $x \wedge y$ 替换为 z，其余部分和 A 相同；再构造一个新的赋值方案 w，将 z 赋值为 $v(x \wedge y)$，其余赋值和 v 相同。

  由归纳假设可知：对于含 1 个运算符号的布尔表达式 $x \wedge y$ 和赋值方案 v 有 $(v(x \vee y))' = v'(x \wedge y)$，即：方案 w' 对 z 的赋值恰为 $v'(x \wedge y)$，因此 $w'(B^*) = v'(A^*)$。同时，注意到 $w(B) = v(A)$ 以及（由归纳假设）$w(B) = (w'(B^*))'$，因此 $v(A) = (v'(A^*))'$，故 $n=k+1$ 时结论成立。

由归纳公理知命题对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

(2) 对任意赋值 v，因为 $A \Leftrightarrow B$，因此 $v'(A) = v'(B)$，故

$$v(A^*) = (v'(A))' = (v'(B))' = v(B^*)$$

因此 $A^* \Leftrightarrow B^*$。