

离散数学作业 20 – 布尔代数引论

Problem 1

设 B 是布尔代数, B 中的表达式 f 是 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

- (1) 化简 f ;
- (2) 求 f 的对偶式 f^* .

Problem 2

在布尔代数中, 证明:

- (1) $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$;
- (2) $\forall a, b \in B (a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a')$, 其中 a' 表示 a 的补元.

Problem 3

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 在 B 上定义二元运算 \oplus , $\forall x, y \in B$ 有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

请回答:

- (1) $\langle B, \oplus \rangle$ 能否构成代数系统?
- (2) B 在 \oplus 下是否有单位元? 有哪些元素有逆元?

Problem 4

设 B 是布尔代数, $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$, 证明:

$$(1) (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \dots \wedge a_n'$$

$$(2) (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \dots \vee a_n'$$

Problem 5

设 B_1, B_2, B_3 是布尔代数, 证明: 若 $B_1 \cong B_2, B_2 \cong B_3$, 则 $B_1 \cong B_3$.

Problem 6

今有 x, y, z 三个布尔变元, 用 xyz 表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F : 当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x, y, z) = 1$, 否则 $F(x, y, z) = 0$ 。

(1) 给出 F 的真值表。

(2) 以“布尔积之布尔和”的形式给出 F 的表达式 (无需化简)。

(3) 化简该表达式。

Problem 7

在布尔代数中, 对一个包含若干运算 (不一定为二元运算) 的集合 S , 若任意布尔函数都可以使用仅包含 S 中运算的公式表出, 称 S 是“完备集”。请证明:

(1) $S = \{\wedge, \vee, '\}$ 是完备集, 其中 $'$ 为补运算;

(2) $S = \{\wedge, \vee\}$ 不是完备集;

(3) 存在基数为 1 的完备集。

Problem 8

在布尔代数中，

- 对一条布尔表达式 A ，可以通过对每一步运算增加括号，使其具有唯一明确的运算顺序，例如

$$x \vee y \wedge z \vee w = (x \vee (y \wedge z)) \vee w$$

在这样的表达式中，若将 \wedge 和 \vee 互换，将 0 和 1 互换，得到的表达式称为 A 的“对偶式”，记为 A^* ；

- 对一条布尔表达式 A ，记 v 为一种赋值方案，对出现在 A 中的所有变量确定一个真值，并记 $v(A)$ 为对表达式 A 使用方案 v 进行赋值后表达式的值。对一种赋值方案 v ，记 v' 为其相反赋值，即： v' 将 v 中赋值为 0 的变量赋值为 1，反之亦然。

请证明：

- (1) 若 A 和 A^* 互为对偶式，同时 v 和 v' 互为相反赋值，则 $v(A^*) = (v'(A))'$ ；（提示：用数学归纳法）
- (2) 若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$ 。（提示：用上一题的结论）