离散数学作业 Solution set 19

Problem 1

令$\langle D_{12}, |\rangle$表示12的所有正因子组成的偏序集。

(1) 证明$\langle D_{12}, |\rangle$是一个偏序格，并由此定义运算$*$和$\circ$，证明$\langle D_{12}, *, \circ\rangle$是对应的代数格

(2) 按照(1)的定义，说明$\langle D_{12}, *, \circ\rangle$是否是一个有补格

(3) 按照(1)的定义，说明$\langle D_{12}, *, \circ\rangle$是否是一个分配格

解:

(1) 显然，$x \wedge y = \gcd(x, y), x \vee y = \operatorname{lcm}(x, y)$。首先证明它是偏序格，对于任意$x, y \in D_{12}$，$\gcd(x, y), \operatorname{lcm}(x, y)$必定存在。对任意满足$x \mid z, y \mid z, z \mid 12$的正整数$z$，我们有$\operatorname{lcm}(x, y) \mid z$且$\operatorname{lcm}(x, y) \mid 12$。故$\operatorname{lcm}(x, y)$是最小上界。同理可证$\gcd(x, y)$是最大下界。故$D_{12}$是一个偏序格。易见$* = \gcd$和$\circ = \operatorname{lcm}$满足结合律和交换律，对于吸收律，$\gcd(x, \operatorname{lcm}(x, y)) = x$，$\operatorname{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$，故$D_{12}$是一个代数格。

(2) 不是，2没有补元

(3) 是，所有五元子格均不与钻石格或五角格同构。

Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

(1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(2) $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$;

(3) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;

(4) $L = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots\}$.

解：
(1)不是格，其它都是格。

Problem 3

设L是格，并且$a, b, c \in L$求以下公式的对偶式：

(1) $a \wedge (a \vee b) \preceq a$;

(2) $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(3) $b \vee (c \wedge a) \preceq (b \vee c) \wedge a$.

解：

(1) $a \vee (a \wedge b) \succeq a$;

(2) $a \wedge (b \vee c) \succeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

(3) $b \wedge (c \vee a) \succeq (b \wedge c) \vee a$.

Problem 4

设L是格，$a,b,c \in L$, 且$a \preceq b \preceq c$, 证明$a \vee b = b \wedge c$.

证明:

由$a \preceq b$得$a \vee b = b$。由$b \preceq c$得$b = b \wedge c$。因此$a \vee b = b \wedge c$。

Problem 5

证明：设$\langle L, \preceq \rangle$ 为一个有补分配格，则L中所有元素的补元唯一。

证明：

设$a \in L$，若a_1, a_2都是a的补元，有

$$a_1 = a_1 \wedge (a \vee a_2) = (a_1 \wedge a) \vee (a_1 \wedge a_2) = a_1 \wedge a_2$$

以及

$$a_2 = a_2 \wedge (a \vee a_1) = (a_2 \wedge a) \vee (a_2 \wedge a_1) = a_1 \wedge a_2$$

故$a_1 = a_2$

Problem 6

设$< L, \preceq >$是格，任取$a \in L$，令$S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$, 证明$< S, \preceq >$是$L$的子格。证明：

因为$a \in S$，所以S非空。任取$x, y \in S$，则有$x \preceq a, y \preceq a$。有

$$x \wedge y \preceq x \preceq a, x \vee y \preceq a \vee a \preceq a$$

。故运算封闭，得证。

Problem 7

令I是格L的非空子集，若满足$\forall a, b \in I, a \vee b \in I$和$\forall a \in I, \forall x \in L, x \preceq a \Rightarrow x \in I$，则$I$是$L$的一个理想。

证明：L的任意理想I是L的子格

证明：只需证I关于$\wedge$封闭。任取$a, b \in I$，我们有$a \wedge b \preceq a$，由条件立即可得$x \wedge b \in I$。得证。

Problem 8

令$\langle A, \preceq \rangle$表示一个有限全序集。证明：

(1) A是一个格并且是有界格

(2) 若A的元素超过两个，那么它不可能是有补格。

(3) A是分配格

证明：

(1) 对于任意$x, y \in A$，因为A是一个全序集，不失一般性假设$x \preceq y$。定义$x \wedge y = x$，$x \vee y = y$。易见它确实是一个偏序格。由于A有限，必然有最大元素和最小元素，因此是有界格。

(2) 由于A的元素超过两个，必然存在一个既不是最大也不是最小的元素，记为a，设最大元素为x，最小元素y。若a有补元a'，那么必然有$a \preceq a'$或$a' \preceq a$。此时，要么$a = x$，要么$a = y$，矛盾，则a没有补元，得证。

(3) 对于任意元素$a, b, c \in A$，不失一般性假设$a \preceq b \preceq c$。我们有$a \wedge (b \vee c) = a$，$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a$。故得证。

Problem 9

证明在任意格中，均有

(1) $x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(2) $x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

证明：

(1) 显然，我们有$x \preceq (x \vee y)$和$x \leq (x \vee z)$，并且$(y \wedge z) \preceq y \preceq (x \vee y)$和$(y \wedge z) \preceq z \preceq (x \vee z)$。故我们有$x \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ 和 $(y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$。得证。

(2) 由对偶原理直接可得。