

# 离散数学作业 Problem Set 17

## Problem 1

不定项选择题

设  $H, K$  是群  $\langle G, \circ \rangle$  的子群, 下面哪些代数系统是  $\langle G, \circ \rangle$  的子群?

A.  $\langle H \cap K, \circ \rangle$     B.  $\langle K - H, \circ \rangle$     C.  $\langle H - K, \circ \rangle$

## Problem 2

设  $V = \langle a, b, * \rangle$  是半群, 且  $a * a = b$ , 证明:

(1)  $a * b = b * a$

(2)  $b * b = b$

## Problem 3

设  $H$  是群  $G$  的子群,  $x \in G$ , 令  $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | h \in H\}$ , 证明  $xHx^{-1}$  是  $G$  的子群, 称为  $H$  的共轭子群.

## Problem 4

设  $H$  和  $K$  分别为群  $G$  的  $r, s$  阶子群, 若  $r$  与  $s$  互素, 证明  $H \cap K = \{e\}$ .

## Problem 5

证明：若  $G$  中只有一个 2 阶元，则这个 2 阶元一定与  $G$  中所有元素可交换。

## Problem 6

证明：在群  $G$  中，如果  $g, h \in G$  满足  $gh = hg$ ，并且  $\gcd(|g|, |h|) = 1$ ，那么  $|gh| = |g||h|$

(提示：令  $N = |gh||g|$ ，使用阶的性质和交换律)

## Problem 7

设群  $G$  有子群  $H$ ， $H$  是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$$

证明：若子群  $H$  为正规子群，则左右陪集相等。即证  $\forall g \in G, gH = Hg$ 。

## Problem 8

证明：使用阶的概念证明费马小定理。即对素数  $p$  和任意整数  $a$ ，均有  $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。

(提示：考虑集合  $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$  在乘法下构成的群。使用拉格朗日定理的拓展：元素的阶和群的阶之间的关系)