离散数学第十六次作业-群论导引

Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群, 独异点和群:

(1) a 是正实数, $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, 运算是普通乘法.

(2) $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数, 运算是普通乘法.

(3) $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数, 运算是普通加法.

(4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法.

(5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法.

(6) $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$, n 为某个给定正整数, $\mathbb{C}$ 为复数集合, 运算是复数乘法.

注: (4) (5) 两小题中, 形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 只有 x 一个变元, 系数均为实数的多项式, 叫做一元实系数多项式.

Problem 2

$S = \{a, b, c\}$, $*$ 是 S 上的二元运算, 且 $\forall x, y \in S$, $x * y = x$.

(1) 证明 S 关于 $*$ 运算构成半群.

(2) 试判断 S 成为独异点的条件.

Problem 3

设 A 是一个非空集合, 定义: $a \circ b = a, \forall a, b \in A$. 试证明: $\langle A, \circ \rangle$ 是一个半群.

Problem 4

设 G 是一个群, 并且 $|G|$ 为偶数, 证明 G 中必定存在一个元素 g 满足 $g \neq e$ 且 $g = g^{-1}$

Problem 5

证明：设 a 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元, 则 a 一定是单位元.

Problem 6

(结合律) 假定集合 S 上定义的二元操作 $\circ$ 满足结合律. 我们知道二元操作只定义在两个元素上, 当参与运算的元素超过两个时, 会有很多种不同的顺序, 比如, 假定 $a, b, c, d \in S$, 那么可能会有的情况有

$$(a \circ b) \circ (c \circ d), (a \circ (b \circ c)) \circ d, a \circ ((b \circ c) \circ d)$$

等等, 注意到**每一步只进行一次运算**. 证明：无论我们怎么放置括号, 这种嵌套运算的最终结果是不变的. 即证明对 $s_1 s_2 ... s_n \in S$, 任意括号嵌套顺序下的结果都等同于 $((...((s_1 \circ s_2) \circ s_3)...) \circ s_n)$.

(提示：使用数学归纳法, 基础情况是 $n = 2$, 手动尝试一下从 $n = 4$ 到 $n = 5$ 的情况).

Problem 7

证明对任意群 G 以及 $g, h \in G$ 我们有 $(gh)^{-1} = h^{-1} g^{-1}$. 对于正整数 n, 给出 $(g_1 g_2 ... g_n)^{-1}$ 的一个形式.

Problem 8

(数论) 我们知道, 在整数集合 Z 上的同余关系是一个等价关系. 我们用记号 $[a]_n$ 表示 a 的模 n 同余类. 即

$$b \in [a]_n \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

模 n 同余类构成的集合是一个重要的概念, 有许多记法, 例如 $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 等. 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$. 对于正整数 n, 我们记扩展的加法为

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

易证 $\mathbb{Z}_n$ 在扩展加法下构成一个群. 类似地, 扩展乘法为

$$[a]_n \times [b]_n := [a \times b]_n.$$

现在令 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n | \gcd(m, n) = 1\}$. 证明：$\mathbb{Z}_n^*$ 在扩展乘法下构成一个群.

Problem 7

设 $i = \sqrt{-1}$, $S = \{1, -1, i, -i\}$, 证明 $\langle S, * \rangle$ 构成群, 其中 $*$ 为复数域上的乘法运算.

Problem 10

证明：G 为交换群当且仅当 $\forall a, b \in G$, 有 $(ab)^2 = a^2 b^2$.