离散数学第十五次作业-代数系统引论

Problem 1

设 S 为 n 元集, 问

(1) 集合 S 上可以定义多少个不同的二元运算?

(2) 其中有多少个二元运算是可交换的?

(3) 其中有多少个二元运算是幂等的?

(4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?

答案:

(1) n^{n^2} 个;

(2) $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 个;

(3) n^{n^2-n} 个;

(4) $n^{n^2} - n^{\frac{n(n+1)}{2}} - n^{n^2-n} + n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个.

Problem 2

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

(1) 试列出 S 中的所有元素;

(2) 给出 S 上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元.

答案: (1)

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\} \\
f_2 &= \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\} \\
f_3 &= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\} \\
f_4 &= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}
\end{aligned}
$$

(2)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

单位元为 f_2, 没有零元 (但有右零元) , f_2 和 f_3 有逆元, 都是自己.

Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 能否确定 a, b, c 的值使得

(1) A 对普通加法封闭?

(2) A 对普通乘法封闭?

答案:

(1) 不能. 假设存在满足题意的集合 A, 那么 A 中必然存在绝对值最大的非零元素, 不妨假设是 a, 那么 $|a+a| = 2|a| > |a|$ 比 A 中绝对值最大的元素还大, 因此不属于 A, 矛盾. 故不存在满足题意的集合.

(2) 能, $A = \{-1, 0, 1\}$.

Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭:

(1) 整数集合 $\mathbb{Z}$ 和普通的减法运算.

(2) 非零整数集合 $\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算.

(3) 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算, 其中 $n \geq 2$.

(4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$.

(5) 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算, 其中 $\circ$ 运算定义为:
$$\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+,\, a \circ b = ab - a - b$$

(6) $\mathbb{A} = \{a_1,\, a_2,\, \dots\, ,\, a_n\}$, $n \geq 2$. $\circ$ 运算定义如下:
$$\forall a,\, b \in \mathbb{A},\, a \circ b = b$$

(7) $\mathbb{S} = \{0,\, 1\}$ 关于普通加法和乘法运算.

(8) $\mathbb{S} = \{x|x = 2^n,\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

(9) $\mathbb{S} = \{x|x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

答案:

(1) 封闭.

(2) 不封闭.

(3) 加法, 乘法都封闭.

(4) 加法不封闭, 乘法封闭.

(5) 不封闭.

(6) 封闭.

(7) 加法不封闭, 乘法封闭.

(8) 加法不封闭, 乘法封闭.

(9) 加法封闭, 乘法不封闭.

Problem 5

$\mathbb{R}$ 为实数集, 定义以下 4 个函数 f_1, f_2, f_3, f_4. $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$ 有

$$
\begin{aligned}
f_1((x,y)) &= x \cdot y, & f_2((x,y)) &= x - y, \\
f_3((x,y)) &= \max(x,y), & f_4((x,y)) &= |x-y|.
\end{aligned}
$$

(1) 判断上述二元运算是否为可交换, 可结合, 幂等的.

(2) 求上述二元运算的单位元, 零元以及每一个可逆元素的逆元.

(3) 设 $A = \{a,\, b\}$, 试给出 A 上一个不可交换, 也不可结合的二元运算.

答案:

(1)

	可交换	可结合	幂等
f_1	√	√	×
f_2	×	×	×
f_3	√	√	√
f_4	√	×	×

(2)

	单位元	零元	逆元
f_1	1	0	$1/x(x \neq 0)$
f_2	$\times$	$\times$	$\times$
f_3	$\times$	$\times$	$\times$
f_4	$\times$	$\times$	$\times$

(3)

$\circ$	a	b
a	b	b
b	a	a

Problem 6

设 $S = \{1, 2, ..., 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, *\rangle$? 如果能, 则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元.

(1) $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数.

(2) $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数.

(3) $x * y = \max(x, y)$.

(4) $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$.

答案:

	代数系统	交换律	结合律	单位元	零元
(1)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	1
(2)	$\times$				
(3)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	1	10
(4)	$\times$				

Problem 7

判断下列集合能否构成代数系统 $V = \langle \mathbb{N}, +\rangle$ 的子代数:

(1) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 的某次幂可以被 16 整除 $\}$

(2) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x$的某次幂可以被$y$整除$\}$

(3) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 与 5 互素 $\}$

(4) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 是 30 的因子 $\}$

(5) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 是 30 的倍数 $\}$

答案:

(1) 能.

(2) 能.

(3) 不能.

(4) 不能.

(5) 能.

Problem 8

设 $S=\{a,b,c,d\}$, 定义 S 上的一个二元运算 $\circ$ 如下表所示:

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

1. 请指出代数系统 $V=\langle S,\ \circ\rangle$ 的单位元和零元, 并尝试给出 V 的所有子代数;

2. 如果保持 S 不变, 同时要求代数系统有唯一单位元 a, 且每个元素在运算 $\circ$ 下都有逆元. 若把将 b,c,d 三个元素任意交换后相同的运算表当作同一种情况（同构）, 请画出所有满足条件的 $\circ$ 的运算表.

答案:

(1) V 的单位元为 a, 没有零元, V 所有子代数有: $\langle\{a\},\circ\rangle,\langle\{a,b\},\circ\rangle,\langle\{a,c\},\circ\rangle,\langle\{a,d\},\circ\rangle,\langle\{a,b,c,d\},\circ\rangle$

(2) 实际上还有四阶循环群一种, 一个满足题意的运算表为

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Problem 9

设 $\langle A,\oplus\rangle$ 和 $\langle B,\odot\rangle$ 是两个代数系统. f 是 $\langle A,\oplus\rangle$ 到 $\langle B,\odot\rangle$ 的同构映射. 证明:

(1) 如果 $\oplus$ 是可结合的, 那么 $\odot$ 也是可结合的.

(2) 如果 e 是 $\langle A, \oplus \rangle$ 的单位元, 那么 $f(e)$ 是 $\langle B, \odot \rangle$ 的单位元.

(3) 如果在 $\langle A, \oplus \rangle$ 中 b 是 a 的逆元, 那么在 $\langle B, \odot \rangle$ 中 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元.

答案： 易证.