离散数学第十五次作业-代数系统引论

Problem 1

设 S 为 n 元集, 问

(1) 集合 S 上可以定义多少个不同的二元运算?

(2) 其中有多少个二元运算是可交换的?

(3) 其中有多少个二元运算是幂等的?

(4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?

Problem 2

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

(1) 试列出 S 中的所有元素;

(2) 给出 S 上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元.

Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 能否确定 a, b, c 的值使得

(1) A 对普通加法封闭?

(2) A 对普通乘法封闭?

Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭:

(1) 整数集合 $\mathbb{Z}$ 和普通的减法运算.

(2) 非零整数集合 $\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算.

(3) 全体 $n\times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算, 其中 $n\geq 2$.

(4) 全体 $n\times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n\geq 2$.

(5) 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算, 其中 $\circ$ 运算定义为:

$$\forall a,\, b\in\mathbb{R}^+,\, a\circ b=ab-a-b$$

(6) $\mathbb{A}=\{a_1,\, a_2,\, \dots\, ,\, a_n\}$, $n\geq 2$. $\circ$ 运算定义如下:

$$\forall a,\, b\in\mathbb{A},\, a\circ b=b$$

(7) $\mathbb{S}=\{0,\, 1\}$ 关于普通加法和乘法运算.

(8) $\mathbb{S}=\{x|x=2^n,\, n\in\mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

(9) $\mathbb{S}=\{x|x=\ln n, n\in\mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算.

Problem 5

$\mathbb{R}$ 为实数集, 定义以下 4 个函数 $f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4$. $\forall x,\, y\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} f_1((x,y))&=x\cdot y, & f_2((x,y))&=x-y,\\ f_3((x,y))&=\max(x,y), & f_4((x,y))&=|x-y|. \end{aligned}$$

(1) 判断上述二元运算是否为可交换, 可结合, 幂等的.

(2) 求上述二元运算的单位元, 零元以及每一个可逆元素的逆元.

(3) 设 $A=\{a,\, b\}$, 试给出 A 上一个不可交换, 也不可结合的二元运算.

Problem 6

设 $S=\{1,\, 2,\, ...,\, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S,\, *\rangle$? 如果能, 则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元.

(1) $x*y=\gcd(x,\, y)$, $\gcd(x,\, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数.

(2) $x*y=\mathrm{lcm}(x,\, y)$, $\mathrm{lcm}(x,\, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数.

(3) $x*y=\max(x,y)$.

(4) $x*y=$ 质数 p 的个数, 其中 $x\leq p\leq y$.

Problem 7

判断下列集合能否构成代数系统 $V=\langle\mathbb{N},\, +\rangle$ 的子代数:

(1) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 的某次幂可以被 16 整除 $\}$

(2) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x$的某次幂可以被$y$整除$\}$

(3) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 与 5 互素 $\}$

(4) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 是 30 的因子 $\}$

(5) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x$ 是 30 的倍数 $\}$

Problem 8

设 $S = \{a, b, c, d\}$, 定义 S 上的一个二元运算 $\circ$ 如下表所示：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

1. 请指出代数系统 $V = \langle S, \circ\rangle$ 的单位元和零元, 并尝试给出 V 的所有子代数；
2. 如果保持 S 不变, 同时要求代数系统有唯一单位元 a, 且每个元素在运算 $\circ$ 下都有逆元. 若把将 b, c, d 三个元素任意交换后相同的运算表当作同一种情况（同构）, 请画出所有满足条件的 $\circ$ 的运算表.

Problem 9

设 $\langle A, \oplus\rangle$ 和 $\langle B, \odot\rangle$ 是两个代数系统. f 是 $\langle A, \oplus\rangle$ 到 $\langle B, \odot\rangle$ 的同构映射. 证明:

(1) 如果 $\oplus$ 是可结合的, 那么 $\odot$ 也是可结合的.

(2) 如果 e 是 $\langle A, \oplus\rangle$ 的单位元, 那么 $f(e)$ 是 $\langle B, \odot\rangle$ 的单位元.

(3) 如果在 $\langle A, \oplus\rangle$ 中 b 是 a 的逆元, 那么在 $\langle B, \odot\rangle$ 中 $f(a)$ 是 $f(b)$ 的逆元.