离散数学第十三次作业-偏序集与格

Problem 1

下面哪些是偏序集?

(a) $(\mathbb{Z}, =)$　(b) $(\mathbb{Z}, \neq)$　(c) $(\mathbb{Z}, \geq)$　(d) $(\mathbb{Z}, \nmid)$

答案:

(a) 是　(b) 不是　(c) 是　(d) 不是

Problem 2

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}, \subseteq),$$

回答下述问题.

a) 求极大元素.

b) 求极小元素.

c) 存在最大元素吗? 如果存在请求出.

d) 存在最小元素吗? 如果存在请求出.

e) 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界.

f) 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界.

g) 求 $\{\{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$ 的所有下界.

h) 如果存在的话, 求 $\{\{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$ 的最大下界.

答案:

a) $\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$

b) $\{1\}, \{2\}, \{4\}$

c) 不存在

d) 不存在

e) $\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$

f) $\{2, 4\}$

g) $\{3, 4\}, \{4\}$

h) $\{3, 4\}$

Problem 3

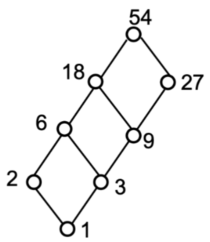
已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系,

(1) 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.

(2) 确定 A 中最长链的长度, 并按字典序写出 A 中所有最长的链.

(3) 试计算 A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链.

答案:



- 最长链长: 5.
- 最长链: $\{1, 2, 6, 18, 54\}, \{1, 3, 6, 18, 54\}, \{1, 3, 9, 18, 54\}, \{1, 3, 9, 27, 54\}$.
- 至少划分成 5 个互不相交的反链: $\{54\}, \{18, 27\}, \{6, 9\}, \{2, 3\}, \{1\}$.

Problem 4

设 A 为集合, $B = \rho(A) \setminus \{\emptyset\} \setminus \{A\}$, 且 $B \neq \emptyset$. 求偏序集 $(B, \subseteq)$ 的极大元, 极小元, 最小元.

答案: 因为 $B \neq \emptyset$, 所以 $|A| > 1$. 因此对任意 $x \in A$, $A \setminus \{x\}$ 都是极大元, $\{x\}$ 都是极小元, 无最小元.

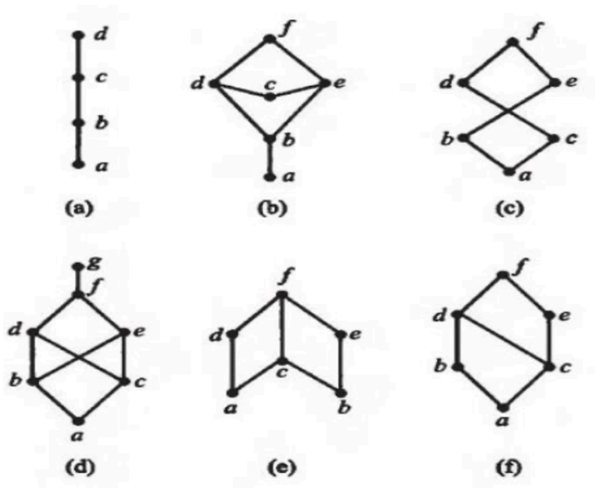
Problem 5

证明: 长度为 $mn+1$ 的偏序集存在大小为 $m+1$ 的链或存在大小为 $n+1$ 的反链.

答案: 若 X 的高度为 r, 宽度为 s. 根据 Dilworth 定理, X 可以划分为 r 个~~反~~链 $C_1, C_2, \ldots, C_r$. 并且有 $|C_1| + \cdots + |C_r| = |X|$. 因此 $|X| = |C_1| + \cdots + |Cr| \le sr$. 若 $s \le n$ 并且 $r \le m$, 则 $|X| \le mn < mn+1$ 矛盾.

Problem 6

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.



答案: 答案: (b),(d),(e) 不是格. 在 (b) 中 $\{d,e\}$ 没有最大下界. 在 (d) 中 $\{d,e\}$ 没有最大下界. 在 (e) 中 $\{a,b\}$ 没有最大下界.

Problem 7

针对 **Problem 6** 中的每个格, 如果格中的元素存在补元, 则求出这些补元.

答案:

(a) a 与 d 互为补元, 其他元素没有补元;

(c) a 与 f 互为补元, b 的补元是 c 和 d, c 的补元是 b 和 e,d 的补元是 b 和 e,e 的补元是 c 和 d.

(f) a 与 f 互为补元, b 与 e 互为补元, c 与 d 没有补元.

Problem 8

说明 **Problem 6** 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格, 并说明理由.

答案:

(a) 是分配格, 因为任何链都是分配格. 不是有补格和布尔格, 因为 b 与 c 没有补元;

(c) 不是分配格, 因为含有 5 元子格与五角格同构. 是有补格, 每个元素都有补元. 不是布尔格, 因为不是分配格.

(f) 是分配格, 因为不含有与钻石格和五角格同构的子格. 不是有补格和布尔格, 因为 c 与 d 没有补元.

Problem 9

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格, 证明 $\forall a \in L$, 有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

答案: $a \wedge 0 \preceq 0, 0 \preceq 0$, 且 $0 \preceq a \Rightarrow 0 \preceq a \wedge 0$, 根据反对称性 $a \wedge 0 = 0$.
$a \preceq a \vee 0, 0 \preceq a$, 且 $a \preceq a \Rightarrow a \vee 0 \preceq a$, 根据反对称性 $a \vee 0 = a$.
$a \wedge 1 \preceq a, a \preceq a$, 且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \preceq a \wedge 1$, 根据反对称性 $a \wedge 1 = a$.
$1 \preceq a \vee 1, 1 \preceq 1$, 且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \vee 1 \preceq 1$, 根据反对称性 $a \vee 1 = 1$.

Problem 10

求证：在格 $< L, \times, \oplus >$ 中，若 $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$，则 $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$.

答案: 证明：

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \times (a \oplus c) &= ((a \oplus b) \times a) \oplus ((a \oplus b) \times c) \\
&= a \oplus (c \times (a \oplus b)) \\
&= a \oplus ((c \times a) \oplus (c \times b)) \\
&= (a \oplus (a \times c)) \oplus (b \times c) \\
&= a \oplus (b \times c)
\end{aligned}$$