

离散数学第十三次作业-偏序集与格

Problem 1

下面哪些是偏序集?

- (a) $(\mathbb{Z}, =)$ (b) (\mathbb{Z}, \neq) (c) (\mathbb{Z}, \geq) (d) (\mathbb{Z}, \downarrow)

Problem 2

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq),$$

回答下述问题.

- 求极大元素.
- 求极小元素.
- 存在最大元素吗? 如果存在请求出.
- 存在最小元素吗? 如果存在请求出.
- 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界.
- 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界.
- 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界.
- 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界.

Problem 3

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系,

- 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.
- 确定 A 中最长链的长度, 并按字典序写出 A 中所有最长的链.

(3) 试计算 A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链.

Problem 4

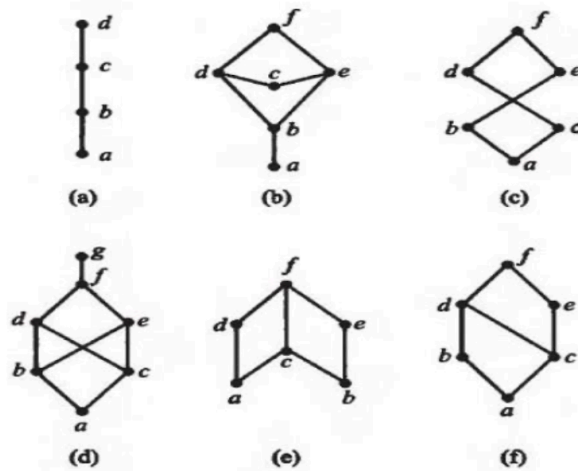
设 A 为集合, $B = \rho(A) \setminus \{\emptyset\} \setminus \{A\}$, 且 $B \neq \emptyset$. 求偏序集 (B, \subseteq) 的极大元, 极小元, 最小元.

Problem 5

证明: 长度为 $mn + 1$ 的偏序集存在大小为 $m + 1$ 的链或存在大小为 $n + 1$ 的反链.

Problem 6

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.



Problem 7

针对 Problem 6 中的每个格, 如果格中的元素存在补元, 则求出这些补元.

Problem 8

说明 Problem 6 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格, 并说明理由.

Problem 9

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 证明 $\forall a \in L$, 有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

Problem 10

求证: 在格 $\langle L, \times, \oplus \rangle$ 中, 若 $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$, 则 $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$.