

离散数学第十三次作业-关系的性质

Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系 R 是否是自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中 $(a, b) \in R$ 当且仅当

- (1) a 比 b 高.
- (2) a 和 b 同名.
- (3) a 和 b 在同一天出生.
- (4) a 和 b 有共同的祖父母.

答案:

- (1) 反对称的, 传递的
- (2) 自反的, 对称的, 传递的
- (3) 自反的, 对称的, 传递的
- (4) 自反的, 对称的, 不是传递的

Problem 2

找出下面定理证明中的错误.

“定理”: 设 R 是集合 A 上的对称的和传递的关系, 则 R 是自反的.

“证明”: 设 $a \in A$. 取元素 $b \in A$ 使得 $(a, b) \in R$. 由于 R 是对称的, 所以有 $(b, a) \in R$. 现在使用传递性, 由 $(a, b) \in R$ 和 $(b, a) \in R$ 可以得出 $(a, a) \in R$.

答案: 错误: 自反性要求 $(a, a) \in R$ 对 A 中所有元素都成立, 但对任意元素 $a \in A$, 并不总存在 $b \in A$ 使得 $(a, b) \in R$.

Problem 3

证明: 集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的.

答案: 首先证明定理的必要条件, 即若 R 是自反的则其逆关系 R^{-1} 是自反的. 任取元素 $a \in A$, 因为 R 是自反的, 故 $(a, a) \in R$. 由逆关系 R^{-1} 的定义可知, 必有 $(a, a) \in R^{-1}$. 充分条件同理可证. 综上, 命题得证.

Problem 4

设 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, 定义 A 上的关系

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x + y = 10\}$$

说明 R 具有哪些性质, 并说明理由.

答案: 只有对称性. 不具有自反性, 例如 $\langle 1, 1 \rangle \notin R$. 也不是反自反的, 例如 $\langle 5, 5 \rangle \in R$. 因为 $\langle 1, 9 \rangle, \langle 9, 1 \rangle$ 都属于 R , 因此也不是反对称的. 也因此不是传递的 (否则可得出 $\langle 1, 1 \rangle \in R$).

Problem 5

设 R 是集合 A 上的自反关系, 证明对所有正整数 n , R^n 也是自反的.

答案: 数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, R^1 显然是自反的. 假设 R^k 是自反的, 其中 k 是一个正整数. 为了完成归纳步骤, 需要证明 R^{k+1} 也是自反的. 任取元素 $a \in A$, 则有 $(a, a) \in R^k$ 且 $(a, a) \in R$, 又 $R^{k+1} = R^k \circ R$, 故 $(a, a) \in R^{k+1}$, 这就证明了 R^{k+1} 也是自反的, 从而完成了证明.

Problem 6

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系, 由以下矩阵表示.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵.

(1) $R_1 \cup R_2$

(2) $R_1 \cap R_2$

(3) $R_2 \circ R_1$

(4) $R_1 \circ R_1$

(5) $R_1 \oplus R_2$

答案:

(1)

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)

$$M_{R_2 \circ R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$M_{R_1 \circ R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5)

$$M_{R_1 \oplus R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 7

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的关系的传递闭包.

(1) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$

(2) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$

(3) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$

(4) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

答案:

(1)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (a, c), (c, c), (d, b), (d, d), (e, b), (e, d)\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
W_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
W_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

故传递关系闭包为 $\{(b, b), (b, c), (b, e), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$.

(3)

$$\begin{aligned}
W_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
W_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

故传递关系闭包为 $\{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$.

(4)

$$\begin{aligned}
W_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
W_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

故传递关系闭包为 $\{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$.

Problem 8

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系, $((a, b), (c, d)) \in R$ 当且仅当 $a + d = b + c$. 证明 R 是等价关系.

答案: 1) 任意正整数的有序对 (a, b) 满足 $a + b = a + b$, 故 $(a, b)R(a, b)$, 因此 R 是自反的.

2) 假设正整数的有序对 (a, b) 和 (c, d) 满足 $(a, b)R(c, d)$, 则 $a + d = b + c$, 也即 $c + b = d + a$, 故 $(c, d)R(a, b)$, 因此 R 是对称的.

3) 假设正整数的有序对 $(a, b), (c, d)$ 和 (e, f) 满足 $(a, b)R(c, d)$ 且 $(c, d)R(e, f)$, 那么 $a + d = b + c$, 故 $d = b + c - a$, 代入 $c + f = d + e$ 中得 $c + f = b + c - a + e$, 从而 $a + f = b + e$, 故 $(a, b)R(e, f)$. 因此 R 是传递的.

综上所述, R 是等价关系.

Problem 9

设 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, R 是 A 上的关系, 且 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle e, f \rangle\}$, 设 $R^* = t(s(r(R)))$, 则 R^* 是 A 上的等价关系.

(1) 给出 R^* 的关系矩阵.

(2) 写出商集 A/R^* .

答案:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A/R^* = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$.

Problem 10

由 n 个元素组成的集合上, 有多少个关系是:

a) 对称的?

b) 反对称的?

c) 非对称的?

d) 反自反的?

e) 自反的 and 对称的?

f) 既不是自反的也不是反自反的?

答案:

a) $2^{n(n+1)/2}$

b) $2^n 3^{n(n-1)/2}$

c) $3^{n(n-1)/2}$

d) $2^{n(n-1)}$

e) $2^{n(n-1)/2}$

f) $2^{n^2} - 2^{n^2-n+1}$