离散数学第十三次作业-关系的性质

Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系 R 是否是自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中 $(a,b) \in R$ 当且仅当

(1) a 比 b 高.

(2) a 和 b 同名.

(3) a 和 b 在同一天出生.

(4) a 和 b 有共同的祖父母.

Problem 2

找出下面定理证明中的错误.

"定理": 设 R 是集合 A 上的对称的和传递的关系, 则 R 是自反的.

"证明": 设 $a \in A$. 取元素 $b \in A$ 使得 $(a,b) \in R$. 由于 R 是对称的, 所以有 $(b,a) \in R$. 现在使用传递性, 由 $(a,b) \in R$ 和 $(b,a) \in R$ 可以得出 $(a,a) \in R$.

Problem 3

证明: 集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的.

Problem 4

设 $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, 定义 A 上的关系

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x + y = 10\}$$

说明 R 具有哪些性质, 并说明理由.

Problem 5

设 R 是集合 A 上的自反关系, 证明对所有正整数 n, R^n 也是自反的.

Problem 6

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系, 由以下矩阵表示.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵.

(1) $R_1 \cup R_2$

(2) $R_1 \cap R_2$

(3) $R_2 \circ R_1$

(4) $R_1 \circ R_1$

(5) $R_1 \oplus R_2$

Problem 7

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的关系的传递闭包.

(1) $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$

(2) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$

(3) $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$

(4) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

Problem 8

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系, $((a, b), (c, d)) \in R$ 当且仅当 $a + d = b + c$. 证明 R 是等价关系.

Problem 9

设 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, R 是 A 上的关系, 且 $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle e, f\rangle\}$, 设 $R^* = t(s(r(R)))$, 则 R^* 是 A 上的等价关系.

(1) 给出 R^* 的关系矩阵.

(2) 写出商集 A/R^*.

Problem 10

由 n 个元素组成的集合上, 有多少个关系是:

a) 对称的?

b) 反对称的?

c) 非对称的?

d) 反自反的?

e) 自反的和对称的?

f) 既不是自反的也不是反自反的?