

离散数学第十二次作业-二元关系

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$, 判断以下结论是否正确.

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| (1) $\emptyset \subseteq A \times A$ | (2) $\{a, c\} \in A$ |
| (3) $\{a, b\} \in A \times A$ | (4) $(c, c) \in A \times A$ |

答案:

- | | |
|--------|--------|
| (1) 正确 | (2) 错误 |
| (3) 错误 | (4) 正确 |

Problem 2

设 A, B 为任意集合, 证明: 若 $A \times A = B \times B$, 则 $A = B$.

答案: 任取 x ,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in A \times A \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in B \times B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

Problem 3

证明 $A \times B \neq B \times A$ 除非 $A = B$, 其中 A 和 B 均为非空集合.

答案: 证明: 当 $A \neq B$ 时, 有以下两种情形:

1. $\exists x \in A (x \notin B)$, 则在 $A \times B$ 中第一个元素为 x 的序偶不存在于 $B \times A$ 中, 因此 $A \times B \neq B \times A$.
2. $\exists x \in B (x \notin A)$, 由对称性, $A \times B \neq B \times A$.

因此, 当 $A \neq B$ 时, $A \times B \neq B \times A$.

当且仅当 $A = B$ 时, $A \times B = A \times A = B \times A$.

综上, 命题得证.

Problem 4

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系, 从集合 B 到集合 A 的逆关系 (记作 R^{-1}) 是有序对集合 $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$; 而补关系 \bar{R} 是有序对集合 $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$.

若 R 是正整数集合上的关系: $R = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b\}$, 求

(1) R^{-1}

(2) \bar{R}

答案:

(1) $R^{-1} = \{(a, b) \mid a \text{ 被 } b \text{ 整除}\}$

(2) $\bar{R} = \{(a, b) \mid a \text{ 不能整除 } b\}$

Problem 5

设

$$A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

求

(1) $A \cup B, A \cap B$

(2) $\text{dom } A, \text{dom } B, \text{dom } (A \cup B)$

(3) $\text{ran } A, \text{ran } B, \text{ran } (A \cap B)$

(4) $\text{fld } (A - B)$

答案:

(1) $A \cup B = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}, A \cap B = \{\langle 2, 4 \rangle\}$

(3) $\text{ran } A = \{2, 3, 4\}, \text{ran } B = \{2, 3, 4\}, \text{ran } (A \cap B) = \{4\}$

(2) $\text{dom } A = \{1, 2, 3\}, \text{dom } B = \{1, 2, 4\}, \text{dom } (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$

(4) $\text{fld } (A - B) = \{1, 2, 3\}$

Problem 6

设 R 是关系 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$, S 是关系 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, 求 $S \circ R$.

答案: $S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Problem 7

设 R_1 和 R_2 分别是整数集合上的“模 3 同余”和“模 4 同余”关系, 即 $R_1 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod}3)\}$ 和 $R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod}4)\}$. 求

$$(1) R_1 \cup R_2$$

$$(2) R_1 \cap R_2$$

$$(3) R_1 - R_2$$

$$(4) R_2 - R_1$$

$$(5) R_1 \oplus R_2$$

答案:

$$(1) R_1 \cup R_2 = \{(a, b) \mid (a \equiv b \pmod{3}) \vee (a \equiv b \pmod{4})\}$$

$$(2) R_1 \cap R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{12}\}$$

$$(3) R_1 - R_2 = \{(a, b) \mid (a \equiv b \pmod{3}) \wedge \neg(a \equiv b \pmod{4})\}$$

$$(4) R_2 - R_1 = \{(a, b) \mid (a \equiv b \pmod{4}) \wedge \neg(a \equiv b \pmod{3})\}$$

$$(5) R_1 \oplus R_2 = \{(a, b) \mid ((a \equiv b \pmod{3}) \vee (a \equiv b \pmod{4})) \wedge \neg(a \equiv b \pmod{12})\}$$

Problem 8

问

a) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个不同的关系?

b) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个关系包含有序对 (a, a) ?

答案:

a) 有 $2^{4^2} = 65536$ 个不同的关系, 因为 $|A \times A| = 4^2$.

b) 有 $2^{4^2-1} = 32768$ 个不同的关系包含有序对 (a, a) , 因为 $|A \times A| - 1 = 4^2$.

Problem 9

设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 试证明:

$$(1) (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}.$$

$$(2) (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}.$$

答案: 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1} \end{aligned}$$

(2) 证明与 (1) 类似.