离散数学第十一次作业-离散概率

Problem 1

设 A 和 B 是两个事件, $P(A)=0.5$, $P(B)=0.3$ 且 $P(A\cap B)=0.1$, 求

a) $P(A\mid B)$

b) $P(B\mid A)$

c) $P(A\mid A\cup B)$

d) $P(A\mid A\cap B)$

e) $P(A\cap B\mid A\cup B)$

答案:

a) $P(A\mid B)=0.1/0.3=\frac{1}{3}$

b) $P(B\mid A)=0.1/0.5=\frac{1}{5}$

c) $P(A\mid A\cup B)=0.5/(0.5+0.3-0.1)=\frac{5}{7}$

d) $P(A\mid A\cap B)=1$

e) $P(A\cap B\mid A\cup B)=0.1/(0.5+0.3-0.1)=\frac{1}{7}$

Problem 2

设 E_1 和 E_2 是两个事件, 如果 $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\times P(E_2)$, 就称 E_1 和 E_2 是独立的. 如果把一枚硬币被抛掷 3 次时所有可能的结果构成一个集合, 把这个集合的子集看做事件, 确定下面的每一对事件是否是独立的.

a) E_1: 第一次硬币头像向下; E_2: 第二次硬币头像向上.

b) E_1: 第一次硬币头像向下; E_2: 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

c) E_1: 第二次硬币头像向下; E_2: 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

答案: 所有可能的结果: $(TTT), (TTH), (THT), (THH), (HTT), (HHT), (HTH), (HHH)$

a) $P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$P(E_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(E_1)P(E_2)$ 所以 E_1 和 E_2 是独立事件.

b) $P(E_1) = \frac{1}{2}$
$P(E_2) = \frac{3}{8}$
$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_2)$ 所以 E_1 和 E_2 不是独立事件.

c) $P(E_1) = \frac{1}{2}$
$P(E_2) = \frac{3}{8}$
$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_2)$ 所以 E_1 和 E_2 不是独立事件.

Problem 3

某工厂有甲乙丙三个车间, 其产量比为 $5:3:2$, 其良品率分别为 $0.95, 0.96, 0.98$. 请问从三个车间的产品中任取一件, 取到次品的概率.

答案: $P = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B_i|A_i) = 0.5 \times 0.05 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.02 = 0.041$

Problem 4

设离散型随机变量 $X \in \{1, 2, 3\}, Y \in \{1, 2, 3\}$ 的联合概率 $P(X \cap Y)$ 分布为:

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若 X, Y 相互独立, 求 a, b.

答案: $a = 2/9, b = 1/9$.

Problem 5

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒. 此外, 假定对给定的禽流感血液检测 (检测结果为阳性不等价于感染病毒, 即感染了禽流感的人也可能呈阴性, 没有感染的人也可能呈阳性), 感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性, 没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性. 那么, 下列概率是多少?

a) 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒.

b) 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒.

c) 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒.

d) 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒.

答案: 记 E: 检测呈阳性, F: 感染了禽流感

a) $P(F \mid E)=\frac{P(E|F)*P(F)}{P(E|F)*P(F)+P(E|\bar{F})*P(\bar{F})}=\frac{0.97*0.04}{0.97*0.04+0.02*0.96}\approx 0.669$

b) $P(\bar{F} \mid E)=\frac{P(E|\bar{F})*P(\bar{F})}{P(E|\bar{F})*P(\bar{F})+P(E|F)*P(F)}=\frac{0.02*0.96}{0.02*0.96+0.97*0.04}\approx 0.331$

c) $P(F \mid \bar{E})=\frac{P(\bar{E}|F)*P(F)}{P(\bar{E}|F)*P(F)+P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})}=\frac{0.03*0.04}{0.03*0.04+0.98*0.96}\approx 0.0013$

d) $P(\bar{F} \mid \bar{E})=\frac{P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})}{P(\bar{E}|\bar{F})*P(\bar{F})+P(\bar{E}|F)*P(F)}=\frac{0.98*0.96}{0.03*0.04+0.98*0.96}\approx 0.9987$

Problem 6

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现 6 点的次数的方差是多少?

答案: 设随机变量 X 是骰子抛掷十次的结果, 则 $V(x)=n(p-p^2)=10\times(\frac{1}{6}-(\frac{1}{6})^2)=\frac{25}{18}$.

Problem 7

一个工业产品以 20 个产品为一个批次出货. 由于测试每件产品确定是否有缺陷比较昂贵, 因此制造商常常选择抽样测试. 抽样测试是为了尽量减少运送给顾客的次品数量, 要求从每批出货中抽取 5 件产品, 并且如果观察到一个以上的次品则拒绝批次. (如果批次被拒绝, 其中的每件产品都会被检测.) 如果批次中包含 4 件次品, 它会被拒绝的概率是多少? 样本大小为 5 的采样中次品的预期数量是多少? 样本大小为 5 的采样中次品数量的方差是多少?

答案: 设 Y 等于样本中次品的数量. 那么 $N=20, r=4, n=5$. 如果 $Y=2,3,4$, 那么

$$\begin{aligned}
P(\text{Reject}) &= P(Y\geq 2)\\
&= P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)\\
&= 1-P(Y=0)-P(Y=1)\\
&= 1-\frac{C(4,0)*C(16,5)}{C(20,5)}-\frac{C(4,1)*C(16,4)}{C(20,5)}\\
&= 1-0.2817-0.4696=0.2487
\end{aligned}\tag{1}$$

样本大小为 5 的采样中次品的预期数量为 $\frac{5\times 4}{20}=1$, 方差为 $5\times\frac{4}{20}\times\frac{20-4}{20}\times\frac{20-5}{20-1}=0.632$.

Problem 8

俄罗斯同胞喜欢玩一个叫轮盘赌 (*Russian roulette*) 的游戏: 假设左轮手枪有六个弹膛, 仅在其中放入一发子弹. 若有 n ($n\leq 6$) 个人轮流开枪, 直到子弹射出为止, 将子弹射出者获胜. 试问: 这个游戏是否公平, 即是否每一个参与的玩家获胜概率相等? 请回答 $n=2,3,4,5,6$ 的每个情形.

答案: 当 $n=2,3,6$ 的时候, 是公平的. 当 $n=4,5$ 的时候, 在最后的那一个人将出现少射一轮的情形, 因此不公平.

Problem 9

某人爱说谎, 三句只能信两句. 他扔了一个骰子, 报告说是“四点”. 问这个骰子真是四点的概率是多少?

答案:

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(\text{骰子真是四点})}{P(\text{某人说是四点})} \\ &= \frac{(P(\text{扔到四点}) \times P(\text{没有说谎}))}{(P(\text{不是四点}) \times P(\text{说谎是四点}) + P(\text{扔到四点}) \times P(\text{没有说谎}))} \\ &= (2/3{\times}1/6)/(5/6{\times}1/3{\times}1/5 + 2/3{\times}1/6) = 2/3 \end{aligned}$$

Problem 10

假设现在有 100 个座位, 从 1 号到 100 号, 从其中随机选择 25 个座位, 所选的连续座位对的期望是多少?(譬如 $\{1, 2\}$ 就是一个连续座位对).

答案: 一共有 99 个连续座位对: $\{1, 2\}, \{2, 3\}, ..., \{99, 100\}$, 每个连续座位对被选择的概率是座位对的期望是 $99 \times \frac{25}{100} \times \frac{24}{99} = 6$.

Problem 11

证明: 任一整数是平方数的必要条件是它有奇数个正因子.

答案: 设 $n^2 = p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}$, 其中 $a_1, \dots, a_t$ 为偶数. 显然, n^2 的正因子 m 必可表示为 $m = p_1^{b_1} \dots p_t^{b_t}$, 其中 $b_i \in \{0, 1, \dots, a_i\}$. 因此总共有 $\prod_{i=1}^{t}(a_i + 1)$ 中选择, 又因为 a_i 为偶数, 因此得证.