

离散数学第八次作业

Problem 1

设 a, b, c, d 均为正整数, 下列命题是否为真? 若为真, 给出证明; 否则, 给出反例。

a) 若 $a \mid c, b \mid c$, 则 $ab \mid c$

b) 若 $a \mid c, b \mid d$, 则 $ab \mid cd$

c) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$

d) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$

Problem 2

证明: 任何 3 个连续整数的乘积可以被 6 整除。

Problem 3

计算:

a) $23300 \bmod 11$

b) $2^{3300} \bmod 31$

c) $3^{516} \bmod 7$

Problem 4

证明: 如果 a 和 b 为正整数, 则 $(2^a - 1) \bmod (2^b - 1) = 2^{a \bmod b} - 1$ 。

Problem 5

证明: 如果 $2^n - 1$ 是质数, 则 n 也为质数。

Problem 6

证明: 对于任意的整数 n

a) $6 \mid n(n+1)(n+2)$

b) $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ 是整数.

Problem 7

证明:

a) 设 $d \geq 1, d \mid m$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

b) 设 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$

c) 设 c 与 m 互质, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod{m}$

Problem 8

借助于费马小定理证明如果 n 是一个正整数, 则 42 能整除 $n^7 - n$ 。

Problem 9

试证明: 若 $p \geq 7$ 为质数, 则 $240 \mid (p^4 - 1)$ 。

Problem 10

证明: 若 m 和 n 互质, 则 $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$ 。