Cardinality

Problem 1

计算下列集合的基数.

(1) $A = \{x, y, z\}$

(2) $B = \{x | x = n^2 \wedge n \in N\}$

(3) $C = \{x | x = n^{109} \wedge n \in N\}$

(4) $B \cap C$

(5) $B \cup C$

(6) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合.

答案：

(1) 3	(3) $\aleph_0$	(5) $\aleph_0$
(2) $\aleph_0$	(4) $\aleph_0$	(6) $\aleph$

来源：**Problem 38,R-page 174**

Problem 2

设 A,B 为可数集，证明：

(1) $A \cap B$ 是可数集；

(2) $A \times B$ 是可数集.

答案：

(1) 不妨设 $A \cap B =$. 若两个集合都是有穷集，那么 $card(A \vee B) = n + m \leqslant \aleph_0$. 如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，构造如下双射 $h : A \cup B \to N$. 当 $x \subset A$ 时，$x = a_i$，$h(x) = i$；当 $x \subset B$

时，$x = b_j$，j =0,1,$\cdots$, 那么 $h(x) = j + n$. 如果 $card\,A = card\,B = \aleph_0$，那么存在双射 $f : A \to N$ 和 $g : B \to N$. 如下构造函数 $h : A \cup B \to N$，

$$h(x)\begin{cases} 2i, & x \in A \\ 2j+1, & x \in B \end{cases}$$

显然 h 为双射. 这就证明了 $card(A \cup B) = \aleph_0$.

(2) 若两个集合都是有穷集，那么 $card(A \times B) = n\dot{m} \leqslant \aleph_0$. 如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，构造双射 $h : A \times B \to N.h(< ai, bi >) = i + jn$. 如果 $card\,A = card\,B = \aleph_0$，那么存在双射 $f : A \to N$ 和 $g : B \to N$. 构造函数 $h : A \times B \to N$，

$$h(< x, y >) = \tfrac{(i+j+1)(i+j)}{2} + i, \text{ 其中 } f(x) = i, g(y) = j$$

显然 h 是双射的. 从而得到 $card(A \times B) = \aleph_0$.

来源：**Problem 39,R-page 174**

Problem 3

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的。对那些可数无限集合，给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

a) 大于 10 的整数

b) 奇负整数

c) 绝对值小于 1 000 000 的整数

d) 0 和 2 之间的实数

e) 集合 $A \times Z^+$ 这里 $A = \{2, 3\}$

f) 10 的整数倍

答案：

(1) 可数无限集，$n \leftrightarrow n + 10$。

(2) 可数无限集，$n \leftrightarrow -(2n - 1)$

(3) 有限集。

(4) 不可数集。

(5) 可数无限集。n 为奇数，则 $n \leftrightarrow (2, n/2 + 1)$;n 为偶数，则 $n \leftrightarrow (3, n/2)$

(5) 可数无限集，$1 \leftrightarrow 0$,$2 \leftrightarrow 10$,$3 \leftrightarrow -10$，$\cdots$。

来源：**Problem 2,page 149**

Problem 4

如果 A 是不可数集合而 B 是可数集合，那么 $A-B$ 一定是不可数的吗？

答案： 假设 $A-B$ 是可数的。那么因为 $A=(A-B)\cup(A\cap B)$，而 $A\cap B$ 也是可数的，得出 A 是可数的，与前提矛盾，故 $A-B$ 一定是是不可数的。

来源：**Problem 17，page 150**

Problem 5

假设 A 是可数集合。证明如果存在一个从 A 到 B 的满射函数 f，则 B 也是可数的。

答案：

(1) $A=\emptyset$ 且 $B=\emptyset$，易证。

(2) $f:A\rightarrow B$ 是满射函数，易得 $card\,A \leqslant card\,B$，又因为 A 是可数的，则 B 为可数的。

来源：**Problem 22,page 150**

Problem 6

证明：如果 A 和 B 是集合且 $A\subseteq B$，则 $|A|\leq|B|$ 。

答案： 证明，构造 $f:A\rightarrow B$ 为任意 $a\in A$, 有 $f(a)=a$，于是有 f 是 $A\rightarrow B$ 的单射，因为 $A\subseteq B$,A 中的元素比 B 中少或者相同，所以 $|A|\leq|B|$

来源：**2019 作业 7 第六题**

Problem 7

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{0,1\}^A$，由定义证明 $\mathcal{P}(A)\approx\{0,1\}^A$.

答案： $\mathcal{P}(A)=\{,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$，$\{0,1\}^A=\{f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\}$，构造双射函数 f.
$f()=f_0$，$f(\{a\})=f_1$，$f(\{b\})=f_2$，$f(\{c\})=f_3$，
$f(\{a,b\})=f_4$，$f(\{a,c\})=f_5$，$f(\{b,c\})=f_6$，$f(\{a,b,c\})=f_7$，
根据等势的定义有 $\mathcal{P}(A)\approx\{0,1\}^A$. 请注意题意要求等势定义证明.

来源：**Problem 29,page R-173**

Problem 8

证明二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数解的集合是可数的，其中 a、b 和 c 都是整数。

答案： 所有整系数一元二次方程的根的集合是可数的。
这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。
一个整系数一元二次方程可以表示成 $ax^2+bx+c=0$，其中 a,b,c 均是整数。
这样，对应到 $Z\times Z\times Z$ 中的元素 (a,b,c)。这个对应是单射。
由于 Z 是可数的，不难证明 $Z\times Z\times Z$ 是可数的。
因此，整系数一元二次方程最多有可数个。

来源：**Problem 30,page 151**

Problem 9

设 A,B,C 为集合，其满足 $A\cap B=A\cap C=\emptyset$ 且 $B\approx C$，试证明:$A\cup B\approx A\cup C$

答案： 由于 $B\approx C$，故存在双射: $f\colon B\to C$; 构造 $g\colon A\cup B\to A\cup C$:

$$g(x)=\begin{cases} x & x\in A \\ f(x) & x\in B \end{cases}$$

由于 $A\cap B=\emptyset$，故不存在一多映射，所以 g 是函数。
下面证明 g 是单射函数: 假设 $g(x_1)=g(x_2)$，若 $g(x_1)\in C$ 则由于 $A\cap C=\emptyset, g(x_1)\notin A$，则 $g(x)=f(x)$ $f(x_1)=g(x_1)=g(x_2)=f(x_2)$，由于 f 是单射，因此 $x_2=x_2$; 若 $g(x_1)\in A$，则由于 $A\ C=\emptyset$，则 $g(x)=x$，故 $x_1=g(x_1)=g(x_2)=x_2$ 故而 $x_1=x_2$ 因此 g 是单射函数。
对于任意 $y\in A\cup C$, 则 $y\in A$ 或者 $y\in C$; 若 $y\in A$, 则 $y\in A\cup B$ 且 $g(y)=y$; 若 $y\in C$, 则 $\exists x\in B, f^{-1}(y)=x$，则 $x\in A\cup B$ 且 $g(x)=(f^{-1}(y))=f(f^{-1}(y))=y$。因此，$g$ 是满射函数。
综上，g 是 $A\cup B\to A\cup C$ 上的双射函数，因此 $A\cup B\approx A\cup C$。

来源：**2018** 期中测试

Problem 10

令 $\{1,2,3\}^\omega$ 为所有仅由数字 $1,2$ 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。

答案： 方案 *1:* 假设 $\{1,2,3\}^\omega$ 可数，则我们将其中所有元素按照某种顺序列出:

$$L_1 = a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$
$$L_2 = a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$
$$L_3 = a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$
$$\dots\dots$$

使用下列规则构造一个新的串 L

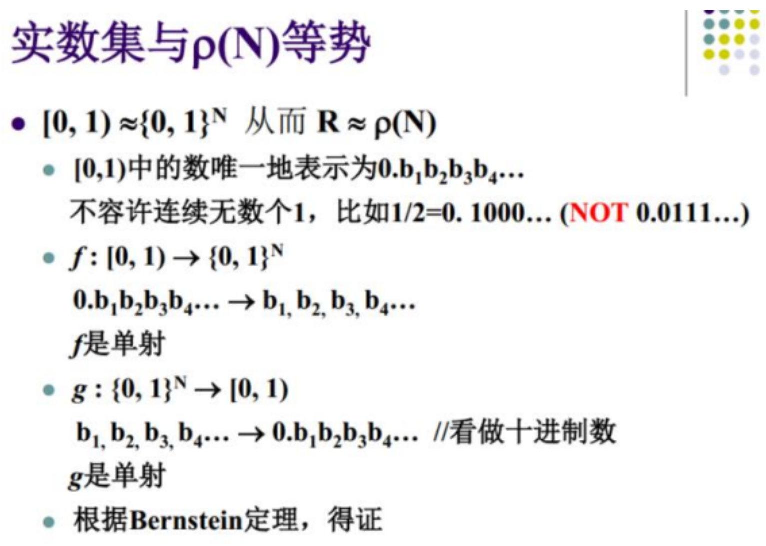
$$\mathrm{L} = a_1a_2a_3\dots$$

其中

$$a_i = \begin{cases} 2 & \text{若 } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{若 } a_{ii} \neq 1 \text{ 并且 } L_i \text{ 长度小于 } 1 \end{cases}$$

则 L 显然与所有列出的 $\{1,2,3\}^\omega$ 中的元素都不同，与 $\{1,2,3\}^\omega$ 中所有元素均可列出矛盾。因此 $\{1,2,3\}^\omega$ 不可列，所以不可数。

方案 *2:* card $\{1,2\}^\omega \leq$ card $\{1,2,3\}^\omega$，而 card $\{1,2\}^\omega \approx$ card $\{0,1\}^\omega$。由于 $[0,1) \approx \{0,1\}^\omega$，从而 card $R \leq$ card $\{1,2,3\}^\omega$，$\{1,2,3\}^\omega$ 不可数。($[0,1) \approx \{0,1\}^\omega$ 的证明参见课件)



方案 *3:* 构造一个从 $(0,1)$ 到 $\{1,2,3\}^\omega$ 的单射,

令 $r \in (0,1) = 0.d_1d_2d_3d_4\dots\dots$，$d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

其中 $0 = \{111\}1 = \{112\}2 = \{113\}3 = \{121\}4 = \{122\}5 = \{123\}6 = \{131\}7 = \{132\}8 = \{133\}9 = \{211\}$

例如 0.123 可以转换为 112113121，0.999 可以转换为 211211211,

这样任意一个 $(0,1)$ 中的实数均可以表示为 $\{1,2,3\}^\omega$ 中的不同元素，得到一个从 $(0,1)$ 到 $\{1,2,3\}^\omega$ 的单射。

card $(0,1) \leq$ card $\{1,2,3\}^\omega$, $(0,1)$ 不可数，$\{1,2,3\}^\omega$ 不可数。

来源：**2016** 期中测试