归纳与递归

Problem 1

问题: 给出下述集合的递归定义:

a) 正偶数集合.

b) 整系数多项式的集合.

c) 3 的正整数次幂的集合.

Problem 2

当 n 为整数时, 证明: $n^3 - n$ 可被 3 整除.

Problem 3

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

Problem 4

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如, $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ 是 7 的拆分. 设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.

a) 证明: $P_{m,n} = P_m$.

b) 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的.

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 1 & n = 1 \\ P_{m,m} & m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & m > n > 1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数.

Problem 6

a) 对于表示十进制数字的非空字符串 s, 给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义.

b) 用结构归纳法证明 $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$. (其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接).

Problem 7

利用数学归纳法证明 (提示: 可能需要使用洛必达法则):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0.$$

Problem 8

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

Problem 9

1) 利用数学归纳法证明:

   (i) $\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) 尝试说明: $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 是关于 n 的 $m+1$ 阶多项式 (即, 式中 n 的最高次幂为 $m+1$).