

离散数学-第五次作业

Problem 1

判断下面定义的几个 $f(n)$ 是否是从 \mathbf{Z} 到 \mathbf{R} 的函数。

a) $f(n) = \pm n$

b) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$

c) $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

答案:

a) 否。 $f(n)$ 不是函数。

b) 是。

c) 否。 $f(n)$ 是函数，但 $f(2) \notin \mathbf{R}$ 。

来源: P.152 problem 2

Problem 2

判断下列各函数是否是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的双射函数。

a) $f(n) = 2x + 1$

b) $f(n) = x^2 + 1$

c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

d) $f(x) = x^5 + 1$

答案:

a) 是

b) 不是

c) 不是

d) 是

来源: P.153 problem 22

Problem 3

令 f 为从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = x^2$ 。求

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$

答案:

a) $\{-1, 1\}$

b) $\{x \mid -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}$

c) $\{x \mid x > 2 \vee x < -2\}$

来源: P.154 problem 42

Problem 4

证明从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = ax + b$ 是可逆的, 其中 a 和 b 为常数且 $a \neq 0$, 并找出 f 的反函数。

答案: 通过证明 f 是单射且满射即证明 f 是可逆的。 $f^{-1}(x) = (x - b)/a$

来源: P.154 problem 39

Problem 5

求下列函数的定义域和值域。

a) 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数。

b) 函数为位串指派串中第一个 1 的位置值, 如果位串为全 0 就指派 0。

c) 函数为位串指派串中块 11 出现的次数。

d) 函数为每个正整数指派在该整数中未出现的 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 数字的个数。

答案:

a) 定义域为 $Z^+ \times Z^+$, 值域为 Z^+ 。

b) 定义域为所有位串的集合, 值域为 N 。

c) 定义域为所有位串的集合, 值域为 N 。

d) 定义域为 Z^+ , 值域为 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 。

来源: P.152 problem 7

Problem 6

判断下列情况下 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ 是否是满射的?

a) $f(m, n) = 2m - n$

b) $f(m, n) = m + n + 1$

c) $f(m, n) = |m| - |n|$

d) $f(m, n) = m^2 - 4$

e) $f(m, n) = m^2 - n^2$

答案:

a) 是

b) 是

c) 是

d) 不是

e) 不是

来源: P.153 problem 14

Problem 7

设 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数, 其中集合 A 和集合 B 是有限集, 且 $|A| = |B|$ 。证明 f 是单射当且仅当它是满射。[提示: $|A| \geq |f(A)|$]

答案:

f 是单射 $\rightarrow f$ 是满射: f 是单射, 则 $|f(A)| = |A| = |B|$, 又 $f(A) \subseteq B$, 所以 $f(A) = B$, 即 f 是满射。

f 是满射 $\rightarrow f$ 是单射: 反证, 若 f 不是单射, 则 $\exists x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$, 此时有 $f(A - \{x_1\}) = B, |A - 1| = |A - \{x_1\}| \geq |B|$, 矛盾。

综上, f 是单射当且仅当它是满射。

来源: P.155 problem 72

Problem 8

假定 f 是从 X 到 Y 的函数, g 是从 Y 到 X 的函数。证明 $f \circ g = I_Y, g \circ f = I_X$ 与 $f^{-1} = g, g^{-1} = f$ 等价。其中 I_X 和 I_Y 分别是 X 和 Y 上的恒等函数。

答案: 1. 证明若 $f \circ g = I_Y, g \circ f = I_X$ 则 $f^{-1} = g, g^{-1} = f$:

I_X 为双射, 则 $g \circ f$ 为双射, f 为单射, g 为满射。同理可知 g 为单射 f 为满射。于是 f 和 g 都为双射, 存在反函数。所以 $f^{-1} = g, g^{-1} = f$ 。

2. 证明若 $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$, 则 $f \circ g = I_Y$, $g \circ f = I_X$:

对任意 $x \in X$, $f(x) = g^{-1}(x) = y \in Y$, 有 $f(x) = y, g(y) = x$ 。

对任意 $x \in X$, $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(y) = x = I_X(x)$ 。 $g \circ f = I_X$ 。

反之同理。

来源: 2020 年作业 6 第 7 题

Problem 9

令 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数。令 S 和 T 为 A 的子集。证明

a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

b) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

答案:

a) 分别证明 $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ 和 $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$ 。

b) 假设 $b \in f(S \cap T)$, 那么对于某些 $a \in S \cap T$ 有 $b = f(a)$ 。可得到 $b \in f(S) \cap f(T)$ 。这是一个充分条件, 所以原题得证。

来源: P.154 problem 40

Problem 10

令 f 为从 A 到 B 的函数。 S 为 B 的子集。证明 $f^{-1}(\bar{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$ 。

答案:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bar{S}) &= \{x \in A \mid f(x) \notin S\} \\ &= \overline{\{x \in A \mid f(x) \in S\}} \\ &= \overline{f^{-1}(S)} \end{aligned}$$

来源: P.154 problem 45