

离散数学-第五次作业

Problem 1

判断下面定义的几个 $f(n)$ 是否是从 \mathbf{Z} 到 \mathbf{R} 的函数。

a) $f(n) = \pm n$

b) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$

c) $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

Problem 2

判断下列各函数是否是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的双射函数。

a) $f(n) = 2x + 1$

b) $f(n) = x^2 + 1$

c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

d) $f(x) = x^5 + 1$

Problem 3

令 f 为从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = x^2$ 。求

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x | x > 4\})$

Problem 4

证明从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = ax + b$ 是可逆的，其中 a 和 b 为常数且 $a \neq 0$ ，并找出 f 的反函数。

Problem 5

求下列函数的定义域和值域。

a) 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数。

- b) 函数为位串指派串中第一个 1 的位置值，如果位串为全 0 就指派 0。
- c) 函数为位串指派串中块 11 出现的次数。
- d) 函数为每个正整数指派在该整数中未出现的 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 数字的个数。

Problem 6

判断下列情况下 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ 是否是满射的？

- a) $f(m, n) = 2m - n$
- b) $f(m, n) = m + n + 1$
- c) $f(m, n) = |m| - |n|$
- d) $f(m, n) = m^2 - 4$
- e) $f(m, n) = m^2 - n^2$

Problem 7

设 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数，其中集合 A 和集合 B 是有限集，且 $|A| = |B|$ 。证明 f 是单射当且仅当它是满射。[提示： $|A| \geq |f(A)|$]

Problem 8

假定 f 是从 X 到 Y 的函数， g 是从 Y 到 X 的函数。证明 $f \circ g = I_Y$ ， $g \circ f = I_X$ 与 $f^{-1} = g$ ， $g^{-1} = f$ 等价。其中 I_X 和 I_Y 分别是 X 和 Y 上的恒等函数。

Problem 9

令 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数。令 S 和 T 为 A 的子集。证明

- a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
- b) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Problem 10

令 f 为从 A 到 B 的函数。 S 为 B 的子集。证明 $f^{-1}(\bar{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$ 。