

离散数学-第四次作业

Problem 1

设 a, b, c 各不相同，判断下列等式中哪个等式为真。

a) $\{\{a, b\}, c, \emptyset\} = \{\{a, b\}, c\}$

b) $\{a, b, a\} = \{a, b\}$

c) $\{\{a\}, \{b\}\} = \{\{a, b\}\}$

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, a, b\}$

答案:

a) 假

b) 真

c) 假

d) 假

Problem 2

判断下列各集合是否为某集合的幂集。

a) \emptyset

b) $\{\emptyset, \{a\}\}$

c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

答案:

a) 不是

b) 是 $\{a\}$ 的幂集

c) 不是

d) 是 $\{a, b\}$ 的幂集

来源: P.107 problem 24

Problem 3

给出以下各个谓词的真值集合，这里的域是整数集合。

a) $P(x) : x^3 \geq 1$

b) $Q(x) : x^2 = 2$

c) $R(x) : x < x^2$

答案:

a) $\{1, 2, 3, \dots\}$

b) \emptyset

c) $\{\dots, -3, -2, -1, 2, 3, \dots\}$

来源: P.108 problem 44

Problem 4

证明如果 A 和 B 为集合，且 $A \subseteq B$ ，则

a) $A \cup B = B$

b) $A \cap B = A$

答案:

a) 易知 $B \subseteq A \cup B$ ，接下来证明 $A \cup B \subseteq B$: 若 $x \in A \cup B$ ，则 $x \in A$ 或 $x \in B$ ，因为 $A \subseteq B$ ，所以 $x \in A$ 可以推出 $x \in B$ ， $x \in B$ 总是成立，得证。

b) 易知 $A \cap B \subseteq A$ ，接下来证明 $A \subseteq A \cap B$: 若 $x \in A$ ，因为 $A \subseteq B$ ，则 $x \in A \cap B$ ，得证。

来源: P.116 problem 20

Problem 5

如果集合 A 、 B 、 C 满足下述条件，你能判断 $A = B$ 吗，请说明理由或者给出例子?

a) $A \cup C = B \cup C$

b) $A \cap C = B \cap C$

c) $A \cup C = B \cup C$ 并且 $A \cap C = B \cap C$

答案:

a) 不能， A 、 B 都是 C 的子集

b) 不能, $C = \emptyset$

c) 能。假设 $x \in A$ 。Case 1: $x \in C$, $x \in A \cap C = B \cap C$, 则 $x \in B$ 。Case 2: $x \notin C$, 因为 $x \in A \cup C = B \cup C$, 则 $x \in B$ 。

来源: P.116 problem 30

Problem 6

令 A 和 B 为全集 U 的子集。证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ 。

答案: $A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \equiv \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A) \equiv \forall x(x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}) \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$

来源: P.116 problem 31

Problem 7

证明如果 A 是全集 U 的子集, 则

a) $A \oplus A = \emptyset$

b) $A \oplus U = \overline{A}$

答案:

a) $A \oplus A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

b) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}$

来源: P.116 problem 37

Problem 8

令 $A_i = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots, i\}$, 求

a) $\bigcup_{i=1}^n A_i$

b) $\bigcap_{i=1}^n A_i$

答案:

a) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots, n\}$

b) $\{\dots, -2, -1, 0, 1\}$

来源: P.117 problem 48

Problem 9

证明如果 A 和 B 是有限集, 则 $A \cup B$ 是有限集。

答案: 有限集是指含有 k 个元素的集合, 其中 k 是自然数。假设 A 含有 n 个元素, B 含有 m 个元素。那么 $A \cup B$ 的元素最多有 $n + m$ 个, 也是自然数。所以 $A \cup B$ 是有限集。

来源: P.117 problem 44

Problem 10

集合 A 的后继是集合 $A \cup \{A\}$ 。求下列集合的后继。

a) $\{1, 2, 3\}$

b) \emptyset

c) $\{\emptyset\}$

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

答案:

a) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$

b) $\{\emptyset\}$

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

来源: P.117 problem 59