

# 离散数学 (2023) 作业 02 - 谓词逻辑

离散数学教学组

## Problem 1

选择一阶逻辑语言，并将下列语句转换成一阶语句。你认为这些语句构成的推理有错误吗？为什么？

1. 如果存在着存在着的鬼，则鬼存在；
2. 存在着的鬼当然存在；
3. 鬼存在。

## Problem 2

假定一阶语言中有二元函数符号  $+$  和  $\cdot$ ，分别用来表示“加法”和“乘法”；常数符号  $1, 2, 3, 4$  分别表示数字一、二、三、四。再假定变元的论域都是整数。

1. 将下列一阶语言的公式转换成中文语句：

$$\forall x (\exists m (x = 2 \cdot m + 1) \rightarrow \exists n (x \cdot x = 2 \cdot n + 1));$$

2. 将下列中文语句转换成该一阶语言的公式：“没有形如  $4k + 3$  的整数是平方和”。

## Problem 3

在数学分析中，极限的定义如下： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  当且仅当

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists \delta \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in \mathbb{R}) [0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon]$$

那么， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l$  该如何用这种一阶语言表达？

## Problem 4

在线性代数中，称向量组  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  线性相关的，如果

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R}) (\exists c_2 \in \mathbb{R}) \cdots (\exists c_n \in \mathbb{R}) [(c_i \text{不全为零}) \wedge (\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i = 0)].$$

请试着写出向量组  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  线性无关的定义。

## Problem 5

找出变元  $x, y$  和  $z$  的一个公共论域，使语句  $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \forall z ((z = x) \vee (z = y)))$  为真，再找出另外一个论域使其为假。

## Problem 6

将下列逻辑式转化为前束范式。

1.  $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee A$ ，其中  $A$  是不涉及任何变量的命题；
2.  $\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$ ；
3.  $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ 。

---

## Problem 7

证明两个语句  $\neg\exists x\forall yP(x, y)$  和  $\forall x\exists y\neg P(x, y)$  是逻辑等价的，这里两个  $P(x, y)$  第一个变元的量词具有相同的论域，两个  $P(x, y)$  第二个变元的量词也具有相同的论域。

## Problem 8

下列语句的真值是什么？

1.  $\exists!xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$
2.  $\exists!x\neg P(x) \rightarrow \neg\forall xP(x)$
3.  $\forall xP(x) \rightarrow \exists!xP(x)$

## Problem 9

证明下列逻辑等价式，其中  $x$  在  $A$  中不作为自由变元出现。假设论域非空。

1.  $(\forall x P(x)) \vee A \equiv \forall x(P(x) \vee A)$
2.  $(\exists x P(x)) \vee A \equiv \exists x(P(x) \vee A)$

## Problem 10

如果每个变量的论域都为实数集合，判断下列各语句的真值。

1.  $\exists x(x^2 = 2)$
2.  $\exists x(x^2 = -1)$
3.  $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$
4.  $\forall x(x^2 \neq x)$