

离散数学 (2023) 作业 01 - 命题逻辑

March 6, 2023

Problem 1

p	q	r	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Table 1: Problem 1 真值表

Problem 2

1. $r \wedge \neg p$
2. $\neg p \wedge q \wedge r$
3. $r \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$
4. $\neg q \wedge \neg p \wedge r$
5. $(\neg r \wedge \neg p) \rightarrow q$
6. $(p \wedge r) \rightarrow \neg q$

Problem 3

1. Jennifer 和 Teja 不是朋友。
2. 面包师说的“一打”不是 13 个。
3. Abby 每天发送的短信数量少于 100 条。
4. 121 不是一个完全平方数。

Problem 4

1. 真。假 \leftrightarrow 假。
2. 假。真 \rightarrow 假。
3. 真。假 \rightarrow 假。
4. 真。假 \rightarrow 真。

Problem 5

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Table 2: Problem 5 真值表

由于 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值一样, 所以 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Problem 6

令 p, q, r 为如下命题:

- p : TA 是理科学学生
- q : TA 是文科学生
- r : TA 学好了数学

原题可形式化为: $\{p \rightarrow r, \neg q \rightarrow p, \neg r\} \vdash q$

证明.

1. $p \rightarrow r$ premise
2. $\neg r$ premise
3. $\neg p$ MT 1,2
4. $\neg q \rightarrow p$ premise
5. q MT 3,4

□

Problem 7

设:

- p : 矿样为铁;
- q : 矿样为铜;
- r : 矿样为锡;

那么, 三人的判断分别可以形式化为命题逻辑公式 F_1, F_2, F_3 :

- 甲: $F_1 \equiv \neg p \wedge \neg q$.
- 乙: $F_2 \equiv \neg p \wedge r$.
- 丙: $F_3 \equiv p \wedge \neg r$.

显然, 命题 p, q, r 至多只有一项成立, 它们的真值指派记为“T”和“F”。另外, 分别记每人判断正确率“错了”、“对一半”和“全对”为 0, 0.5, 1。那么, 可以构建由 $\{p, q, r\}$ 的真值到 $\{F_1, F_2, F_3\}$ 正确率的映射如表??, 并得到: 该矿样本为铁。甲对一半, 乙全错, 丙全对。

p	q	r	F_1	F_2	F_3
F	F	T	1	1	0
F	T	F	0.5	0.5	0.5
T	F	F	0.5	0	1

Table 3: Problem 7 的命题真值-判断正确率映射关系

Problem 8

记:

$$A \equiv (\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma))$$

$$B \equiv ((\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg\alpha) \wedge ((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma))))$$

根据两公式的真值表??可知, 两公式并不互为重言蕴含

α	β	γ	A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Table 4: Problem 8 的真值表

Problem 9

证明.

- (1 \Rightarrow 2): 根据定义, $\alpha \models \beta$ 说明当 α 为真时 β 也为真。因此 $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ 恒真, 因此 $\alpha \rightarrow \beta$ 为重言式, 即 $\models (\alpha \rightarrow \beta)$.
- (2 \Rightarrow 3):
 - (\models): 由于 $\alpha \rightarrow \beta$ 为重言式, 那么 α 为真时 β 必为真, 此时 $(\alpha \wedge \beta)$ 亦为真, 因此 $\alpha \models (\alpha \wedge \beta)$;
 - (\Rightarrow): 显然, $(\alpha \wedge \beta)$ 为真时有 α 为真, 故 $(\alpha \wedge \beta) \models \alpha$ 。

所以, α 与 $(\alpha \wedge \beta)$ 重言等价。

- (3 \Rightarrow 4):
 - (\models): 显然 β 为真时, $(\alpha \vee \beta)$ 必为真, 因此有 $\beta \models (\alpha \vee \beta)$;
 - (\Rightarrow): $(\alpha \vee \beta)$ 为真可分为下列两种情况讨论:
 - (a) α 为真, 由 α 与 $(\alpha \wedge \beta)$ 重言等价可知, α 为真时, $(\alpha \wedge \beta)$ 必为真, 因此 β 亦为真;
 - (b) α 为假, 那么根据 $(\alpha \vee \beta)$ 可知 β 必须为真;
 因此有 $(\alpha \vee \beta) \models \beta$ 。

故 β 与 $(\alpha \vee \beta)$ 重言等价。

- (4 \Rightarrow 1): 由 $(\alpha \vee \beta) \models \beta$ 可知, α 为真时, β 必为真。根据定义可得 $\alpha \models \beta$ 。

□

Problem 10

(1) 证明.

1.	α	assumption
2.	β	assumption
3.	α	1
4.	$(\beta \rightarrow \alpha)$	\rightarrow i 2, 3
5.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	\rightarrow i 1-4

□

(2) 证明.

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	assumption
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	assumption
3.	α	assumption
4.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	1
5.	$\beta \rightarrow \gamma$	\rightarrow e 3, 4
6.	$\alpha \rightarrow \beta$	2
7.	β	\rightarrow e 3, 6
8.	γ	\rightarrow e 5, 7
9.	$\alpha \rightarrow \gamma$	\rightarrow i 3-8
10.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	\rightarrow i 2-9
11.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	\rightarrow i 1-10

□

(3) 证明.

1.	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	assumption
2.	$\neg\beta \rightarrow \alpha$	assumption
3.	$\neg\beta$	assumption
4.	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	1
5.	$\neg\alpha$	\rightarrow e 3, 4
6.	$\neg\beta \rightarrow \alpha$	2
7.	α	\rightarrow e 3, 6
8.	\perp	\neg e 5, 7
9.	β	\perp e, 3-7
10.	$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \beta$	\rightarrow i 2-8
11.	$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$	\rightarrow i 1-9

□