

离散数学 (2023) 作业 01 - 命题逻辑

离散数学教学组

Problem 1

构造复合命题 $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ 的真值表。

Problem 2

令 p 、 q 、 r 为如下命题：

- p ：在这个地区发现过灰熊。
- q ：在乡间小路上徒步旅行是安全的。
- r ：乡间小路两旁的草莓成熟了。

试用 p 、 q 、 r 和逻辑连接词（包括否定）写出以下命题：

1. 乡间小路两旁的草莓成熟了，但在这个地区没有发现过灰熊。
2. 在这个地区没有发现过灰熊，且在乡间小路上徒步旅行是安全的，但乡间小路两旁的草莓成熟了。
3. 如果乡间小路两旁的草莓成熟了，徒步旅行是安全的当且仅当在这个地区没有发现过灰熊。
4. 在乡间小路上徒步旅行是不安全的，但在这个地区没有发现过灰熊且小路两旁的草莓成熟了。
5. 为了使在乡间小路上旅行很安全，其必要但非充分条件是乡间小路两旁的草莓没有成熟且在这个地区没有发现过灰熊。
6. 无论何时在这个地区发现过灰熊且乡间小路两旁的草莓成熟了，在乡间小路上徒步旅行就不安全。

Problem 3

下列各命题的否定是什么？

1. Jennifer 和 Teja 是朋友。
2. 面包师说的“一打”有 13 个。
3. Abby 每天发送 100 多条短信。
4. 121 是一个完全平方数。

Problem 4

判断下列这些条件语句是真是假：

1. $2 + 2 = 5$ 当且仅当 $1 + 1 = 3$ 。
2. 如果 $1 + 1 = 2$ ，则 $2 + 2 = 5$ 。
3. 如果 $1 + 1 = 3$ ，则 $2 + 2 = 5$ 。
4. 如果 $0 > 1$ ，则 $2 > 1$ 。

Problem 5

试用真值表验证 de Morgan 第一定律 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ 。

Problem 6

将下列命题符号化，判断其是否正确，并证明你的结论：如果 TA 是理科学生，TA 必学好数学。如果 TA 不是文科学生，TA 必是理科学生。TA 没学好数学。所以 TA 是文科学生。

Problem 7

某勘探队有 3 名队员。有一天区的一块矿样，3 人判断如下：

- 甲说：这不是铁，也不是铜。
- 乙说：这不是铁，是锡。
- 丙说：这不是锡，是铁。

经实验鉴定后发现，其中一个人两个判断都正确，一个人判断对一半，一个人全判断错了。根据以上情况判断矿样的种类，并指出谁的判断全对？谁的判断对一半？谁的判断全错？

Problem 8

证明下列两公式互不重言蕴涵（语义蕴涵）：

$$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)), (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg\alpha) \wedge ((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma)))$$

「注意：本题在叙述“ α 当且仅当 β 当且仅当 γ ”时要小心。」

Problem 9

证明下列命题等价：

1. $\alpha \models \beta$;
2. $\models \alpha \rightarrow \beta$;
3. α 与 $(\alpha \wedge \beta)$ 重言等价;
4. β 与 $(\alpha \vee \beta)$ 重言等价。

「注：“ A 与 B 重言等价”的定义为： $A \models B$ 且 $B \models A$ 。」

Problem 10

用自然演绎法证明以下定理（希尔伯特系统下的三条公理模式），其中 α 和 β 为合式公式：

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;
3. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$ 。

「注：本题为语法练习，请勿使用任何语义结果。」