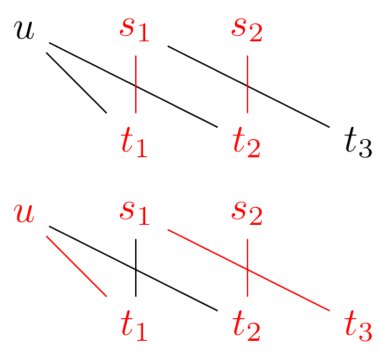
3 Hall 定理

1. 原命题的充分性命题（若**任意**$S \subseteq X$ 有 $|N(S)| \geq |S|$，则存在 X 的完备匹配）因为有全称量词，不太好直接证明。
2. 证明充分性的逆否命题：即没有完备匹配的话，那么存在一个 $S \subseteq X$ 满足 $|N(S)| < |S|$。
3. 在一个最大匹配（无法扩张）M 不是 X 完备匹配的情况下，需要构造一个 S，证明它满足 $|N(S)| < |S|$。
   (a) 由于 M 不是 X 的完备匹配，因此至少有一个点 u 是不被 M 饱和的。
   (b) 那么，我们就可以利用 u 来构造这个 S 以及对应的 $N(S)$。
   - 定义 S 为所有能够从 u 出发，通过 M 交错路径走到的，属于 X 的点；
   - 定义 T 为所有能够从 u 出发，通过 M 交错路径走到的，属于 Y 的点；

   (c) 证明：$|S - \{u\}| = |T|$。根据等势的定义，即需要证明 $S - \{u\}$ 和 T 之间存在**双射**（完美匹配）。
   - 首先，注意到 $S - \{u\} \subseteq X$ 中所有的点都是从 u 出发，通过 M-交错路径回到 X。
   - 由于 M 对 X 来说已经是最大的匹配，所以 M 是不可扩张的，即图中不存在 M-增广路径。故而，在所有被 M 饱和的属于 Y 的点中，必然存在一个最大的 T 满足上述定义，且 T 中的每个点都有一条边将其映射至 $S - \{u\}$ 中的点。
   - 否则，如下图所示（红点表示饱和点，红边表示匹配中的边），若 T 中存在一个点（例如 t_3）无法通过 M 映射到 $S - \{u\}$，那么总可以对 M 中经过它的 M-交错路径（例如 $u - t_1 - s_1 - t_3$）进行扩张，将 M 变大。这与前述假设矛盾：



   - $S - \{u\}$ 中所有的点都是从 T 中经过匹配 M 中的边到达。所以，这些边构成一个从 T 到 $S - \{u\}$ 的**满射**；
   - 由于 M 是一个匹配，因此 M 中的任意两条边之间没有公共点，所以，这些边是一个从 T 到 S 的**单射**；

   (d) 证明：$T = N(S)$，即 S 中所有点的邻居都在 T 中，这里需要用到反证法：
   - 假设存在一个 $v \in S$，它有一个邻居 $y \in Y$ 不在 T 中；
   - 因为 y 不在 T 中，但 v 却在 S 中，所以必有边 $yv \notin M$。即 v 之所以在 S 中，肯定存在一条从 u 出发的 M-交错路径 P 可以到达 v，但这条路径不经过 y；
   - 根据上面的讨论，我们知道路径 P 的最后一条边必然属于 M。又因为 $yv \notin M$，所以我们可以把 yv 接在交错路径 P 的最后成为 P'。
   - 根据交错路径的定义，P' 依然是交错路径。那么，再根据 T 的定义，必然有 $y \in T$，这与上面的假设矛盾，因此 $N(S) = T$。

   (e) 由于 $|S| > |T| = |N(S)|$，所以我们找到了 X 的一个子集，它的邻接点集合比它自己小，原命题得证。

Hall 匹配条件

在为申请者分派工作时，申请者可能比工作多，故工作分派之后可能还剩余一些申请者．将这一问题模型化，我们考虑一个 X，Y-二部图(即二部剖分为 X，Y 的二部图，参见定义 1.2.17)，并在其中找出浸润 X 的一个匹配．

如果一个匹配 M 浸润 X，则对任意 $S\subseteq X$，至少存在 $|S|$ 个顶点在 S 中有相邻顶点，因为与 S 匹配的顶点必须从那个集合中选出．用 $N_G(S)$ 或 $N(S)$ 来表示与 S 中顶点相邻的顶点构成的集合，则 $|N(S)|\geqslant|S|$ 是上述问题的一个必要条件．

条件“对于任意 $S\subseteq X$，$|N(S)|\geqslant|S|$”即是 **Hall 条件**．霍尔(Hall)证明了这个显然的必要条件也是充分的(TONCAS)．

3.1.11 定理(Hall 定理——P. Hall[1935]) *X，Y-二部图有一个浸润 X 的匹配当且仅当对任意 $S\subseteq X$ 有 $|N(S)|\geqslant|S|$.*

证明 *必要性*．与 S 匹配的 $|S|$ 个顶点必在 $N(S)$ 中．

充分性．为证明 Hall 条件是充分的，我们证明其倒置命题．设 M 是 G 的一个最大匹配但 M 没有浸润 X，由此我们要找出一个集合 $S\subseteq X$ 满足 $|N(S)|<|S|$．令 $u\in X$ 是未被 M 浸润的一个顶点．在从 u 出发通过 G 的 M-交错路径可以到达的那些顶点中，令位于 X 中的顶点构成 S，而位于 Y 中的顶点构成 T(参见下图，M 被表示为粗边)．注意，$u\in S$.

我们断言 M 匹配 T 和 $S-\{u\}$．从 u 开始的 M-交错路径沿着不属于 M 的边抵达 Y，并且沿着 M 中的边回到 X. 因此，$S-\{u\}$的每个顶点从 T 的一个顶点通过 M 的一条边到达．由于没有 M-增广路径，故 T 的任意顶点是被浸润的；于是每一条抵达 $y\in T$ 的 M-交错路径通过 M 扩展到 S 的一个顶点．所以 M 中相应的边产生了一个从 T 到 $S-\{u\}$的双射，故而有 $|T|=|S-\{u\}|$.

由 T 和 $S-\{u\}$之间的匹配可以得出 $T\subseteq N(S)$．事实上，$T=N(S)$．假设 $y\in Y-T$ 有一个相邻顶点 $v\in S$. 因为 u 是未被浸润的而 S 中其余顶点通过 M 与 T 匹配，故边 $vy\notin M$. 将边 vy 添加到抵达 v 的一条 M-交错路径上之后，得到一条抵达 y 的 M-交错路径．这同 $y\notin T$ 矛盾．因此 vy 不存在．

由 $T=N(S)$，我们证明了 $|N(S)|=|T|=|S|-1<|S|$．这即完成了对倒置命题的证明． ■

也可以假设 Hall 条件成立，再用反证法来证明充分性：假定没有匹配浸润 X，由此得出一个矛盾．正如我们所看到的，缺少浸润 X 的匹配就不满足 Hall 条件．与假设相矛盾通常意味着倒置问题中的蕴涵关系得到了证明．我们给出的证明就是按这种方式进行论述的．

3.1.12 注记 定理 3.1.11 表明，只要 X，Y-二部图没有浸润 X 的匹配，就能通过展现 X 的某个子集的相邻点太少来证实这一点．

注意、定理和证明允许有重边． ■

目前已有很多关于 Hall 定理的证明，这方面的概要请参见 Mirsky[1971，p38]和 Jacobs[1969]．M. Hall[1948]给出一个证明，由此导出浸润 X 的匹配的数目的一个下界，该下界是顶点度的函数．我们将在 3.2 节从算法角度讨论匹配问题．

如果二剖分的两个集合有相同大小，Hall 定理就变成了**婚配定理**，该定理最初由 Frobenius [1917]证明，其名称的由来是要为 n 名男子和 n 名女子安排融洽的婚配关系．如果每名男子恰好适于与 k 名女子中的任意一人婚配，且每名女子恰好适于与 k 名男子中的任意一人婚配，则必定存在一个完美匹配．这里，仍允许有多重边，这增加了定理的应用范围(例如，参见定理 3.3.9 和 7.1.7)．

3.1.13 推论 *对 $k>0$，任意 k-正则二部图有一个完美匹配．*

证明 令 G 是一个 k-正则 X，Y-二部图．分别用位于 X 中的端点和位于 Y 中的端点来对边进行计数，有 $k|X|=k|Y|$，故 $|X|=|Y|$．于是，只需验证 Hall 条件，因为一个浸润 X 的匹配也是浸润 Y 的匹配，从而必是一个完美匹配．

设 $S\subseteq X$，令 m 表示从 S 到 $N(S)$的边的条数．由于 G 是 k-正则的，因此有 $m=k|S|$．这 m 条边均关联到 $N(S)$，故 $m\leqslant k|N(S)|$．于是当 $k>0$ 时有 $k|S|\leqslant k|N(S)|$，由此得 $|S|\leqslant |N(S)|$．由于选择 $S\subseteq X$ 的随意性，Hall 条件成立． ■

这里，我们也可以用反证法来证明．假定 G 没有完美匹配，则有一个集合 $S\subseteq X$ 使得 $|N(S)|<|S|$．重复上面的论述，推导得出矛盾．