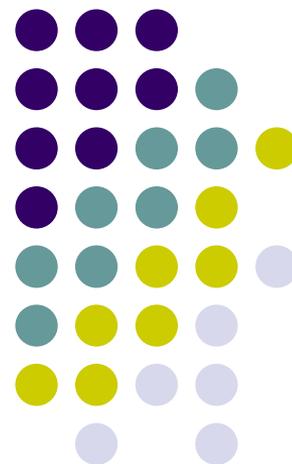


关系及其运算

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系





回顾

- 良序公理
- 数学归纳法
- 强数学归纳法
- 递归定义与结构归纳法



提要

- 关系的定义 (复习)
- 关系的表示 (复习)
- 关系的运算 (复习)
- 0-1矩阵运算 (复习)
- 关系的性质



有序对 (Ordered pair)

- (a, b) 是集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 的简写
- 次序的体现
 - $(x, y) = (u, v)$ iff $x = u$ 且 $y = v$

若 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, 则 $\{x\} = \{u\}$ 或 $\{x\} = \{u, v\}$, 因此 $x = u$ 。

假设 $y \neq v$

(1) 若 $x = y$, 左边 = $\{\{x\}\}$, 而 $v \neq x, \therefore$ 右边 $\neq \{\{x\}\}$;

(2) 若 $x \neq y$, 则必有 $\{x, y\} = \{u, v\}$, 但 y 既非 u , 又非 v , 矛盾。



笛卡尔乘积 (Cartesian Product)

- 对任意集合 A, B
笛卡尔积 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- 例: $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$
- 若 A, B 是有限集合, $|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A=\{1,2\}$, $\rho(A) \times A=?$
- $|A|=m$, $|B|=n$, $|A \times B|=?$





(二元) 关系的定义

- 若 A, B 是集合, 从 A 到 B 的一个关系是 $A \times B$ 的一个子集.
 - 集合, 可以是空集
 - 集合的元素是有序对
- 关系意味着什么?
 - 两类对象之间建立起来的联系!



从A到B的二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
 - “从A到B的关系” R ; $R \subseteq A \times B$
 - 若 $A=B$: 称为“集合A上的（二元）关系”
- 例子
 - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
 - 网页链接、文章引用、相互认识



特殊的二元关系

- 集合A上的空关系 \emptyset : 空关系即空集
- 全域关系 $E_A: E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 $I_A: I_A = \{ (x, x) \mid x \in A \}$



函数是一种特殊的关系

- 函数 $f: A \rightarrow B$
- $R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$ 是一个从 A 到 B 的一个关系

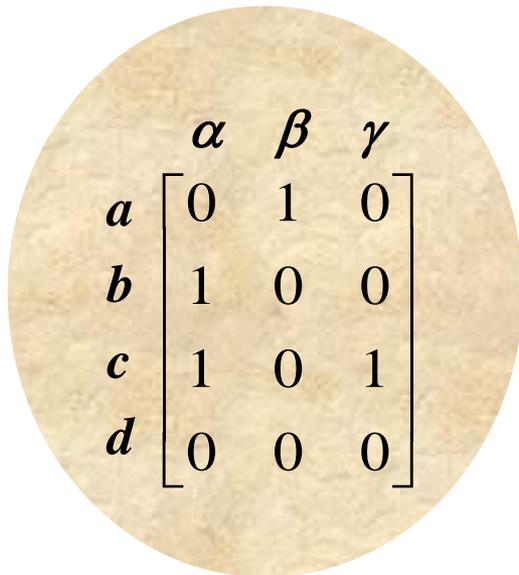


关系的表示

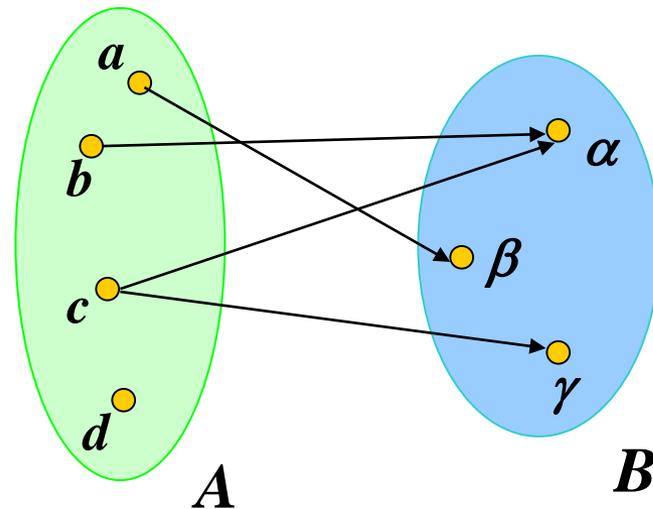
假设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合

- 集合表示: $R_1=\{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha), (c, \gamma)\}$

0-1矩阵



有向图





二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ \longleftrightarrow 有向图 (V_D, E_D)

A 和 B 是集合

有序对集合

$(x, y) \in R$

若 $A=B$, R 中存在序列: (x_1, x_2) ,
 $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集 E_D

从 x 到 y 有一条边

图 D 中存在从 x_1 到 x_n 的长
度为 $n-1$ 的通路



关系的运算 (1)

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用
 - 例子:
 - 自然数集合上: “ $<$ ” \cup “ $=$ ” 等同于 “ \leq ”
 - 自然数集合上: “ \leq ” \cap “ \geq ” 等同于 “ $=$ ”
 - 自然数集合上: “ $<$ ” \cap “ $>$ ” 等同于 \emptyset



关系的运算 (2)

- 与定义域和值域有关的运算
 - $\text{dom } R = \{x \mid \exists y (x,y) \in R\}$
 - $\text{ran } R = \{y \mid \exists x (x,y) \in R\}$
 - $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$
 - $R \uparrow A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge xRy\} \subseteq R$
 - $R[A] = \{y \mid \exists x (x \in A \wedge (x,y) \in R)\} = \text{ran}(R \uparrow A) \subseteq \text{ran } R$
- 例: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,6\}$, A 上关系 R :
 $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,5), (5,2)\}$,
求 $R \uparrow B$ 、 $R[B]$



关系的运算 (3)

- 逆运算

- $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$

- 注意:如果 R 是从 A 到 B 的关系,则 R^{-1} 是从 B 到 A 的。

- $(R^{-1})^{-1} = R$

- 例子: $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

- $(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2)$

- $\Leftrightarrow (y, x) \in R_1$ 或 $(y, x) \in R_2$

- $\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1}$ 或 $(x, y) \in R_2^{-1}$



关系的运算 (4)

- 关系的复合 (合成, Composition)

设 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$,

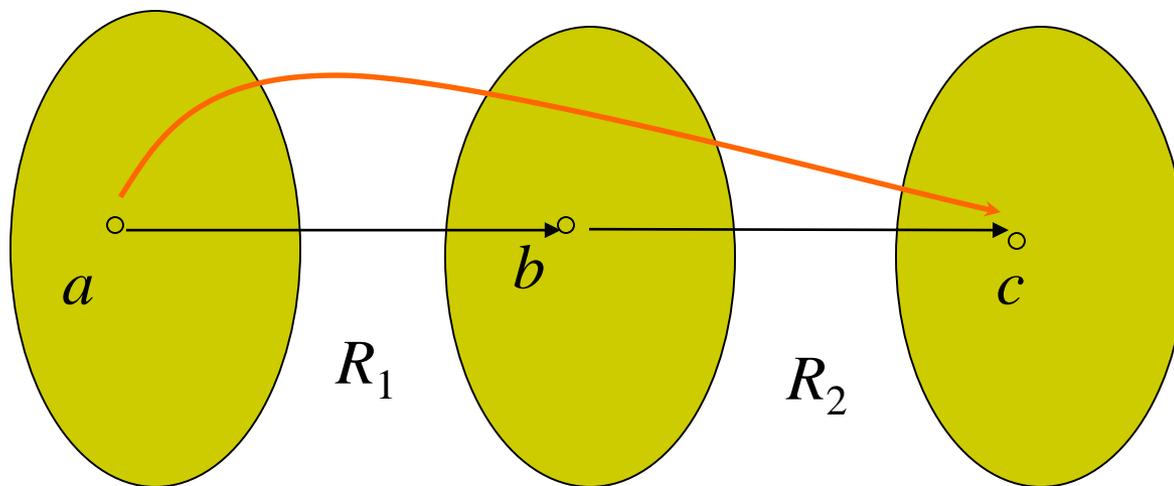
R_1 与 R_2 的复合 (合成), 记为 $R_2 \circ R_1$, 定义如下:

$$R_2 \circ R_1 = \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \}$$



复合关系的图示

- $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ 当且仅当 $a \in A, c \in C$, 且存在 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2$





关系的复合运算：举例

- 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R_1, R_2 为 A 上的关系, 其中:

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$$

则:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$$

$$R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$$



关系的复合运算的性质 (1)

- 结合律
 - 给定 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_3 \subseteq C \times D$, 则:
$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$
- 证明左右两个集合相等.



关系的复合运算的性质 (2)

- 复合关系的逆关系

- 给定 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则:

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

- 同样, 证明左右两个集合相等

- $(x, y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow$
 $\exists t \in B ((y, t) \in R_1 \wedge (t, x) \in R_2) \Leftrightarrow$
 $\exists t \in B ((t, y) \in R_1^{-1} \wedge (x, t) \in R_2^{-1}) \Leftrightarrow$
 $(x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$



关系的复合运算的性质 (3)

- 对集合并运算满足分配律
 - 给定 $F \subseteq A \times B$, $G \subseteq B \times C$, $H \subseteq B \times C$, 则:
$$(G \cup H) \circ F = (G \circ F) \cup (H \circ F)$$
- 对集合交运算: $(G \cap H) \circ F \subseteq (G \circ F) \cap (H \circ F)$

- 注意: 等号不成立。

$$A = \{a\}, B = \{s, t\}, C = \{b\};$$

$$F = \{(a, s), (a, t)\}, G = \{(s, b)\}, H = \{(t, b)\};$$

$$G \cap H = \emptyset, (G \circ F) \cap (H \circ F) = \{(a, b)\}$$



0-1 矩阵运算

- 令0-1矩阵 $M_1=[a_{ij}]$, $M_2=[b_{ij}]$:
 - $C=M_1 \wedge M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=b_{ij}=1$
 - $C=M_1 \vee M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=1$ 或 $b_{ij}=1$
- 令 $r \times s$ 矩阵 $M_1=[a_{ij}]$; $s \times t$ 矩阵 $M_2=[b_{ij}]$:
 - $C=M_1 \otimes M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $\exists k(a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



关系运算的矩阵法 (1)

- 命题

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

证明:

令 $R_1: X \rightarrow Y; R_2: Y \rightarrow Z;$

令 $A = M_{R_1}, B = M_{R_2}, C = M_{R_2 \circ R_1}, D = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$ 有

$$\begin{aligned} c_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y (\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2) \\ &\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1 \end{aligned}$$

For $n \geq 2$, and R a relation on a finite set A , we have

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \cdots \otimes M_R \quad (n \text{ factors})$$



关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合 A 上的关系 R 是：
 - 自反的 reflexive：定义为：对所有的 $a \in A, (a,a) \in R$
 - 反自反的 irreflexive：定义为：对所有的 $a \in A, (a,a) \notin R$

注意区分“非”与“反”
- 设 $A = \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A$
 - $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是自反的
 - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是反自反的
 - $\{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的



自反性与恒等关系

- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$,

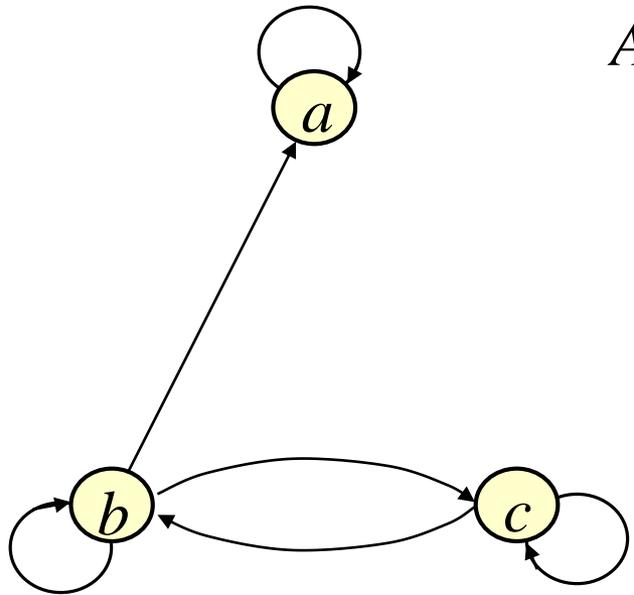
这里 I_A 是集合 A 上的恒等关系, 即: $I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$

直接根据定义证明:

- \Rightarrow 只需证明: 对任意 (a, b) , 若 $(a, b) \in I_A$, 则 $(a, b) \in R$
- \Leftarrow 只需证明: 对任意的 a , 若 $a \in A$, 则 $(a, a) \in R$



自反关系的有向图和0-1矩阵



$A = \{a, b, c\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合 A 上的关系 R 是：
 - 对称的 **symmetric**：定义为：若 $(a,b) \in R$ ，则 $(b,a) \in R$
 - 反对称的 **anti-~**：定义为：若 $(a,b) \in R$ 且 $(b,a) \in R$ ，则 $a=b$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$
 - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
 - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的



理解对称性

- 关系 R 满足对称性：对任意 (a,b) ，若 $(a,b) \in R$ ，则 $(b,a) \in R$
关系 R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall \langle a,b \rangle (\langle a,b \rangle \in R \Rightarrow \langle b,a \rangle \in R)$
- 注意： \emptyset 是对称关系。
- 反对称并不是对称的否定：
(令： $A = \{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$)
 - $\{(1,1), (2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的
 - \emptyset 是对称关系，也是反对称关系。

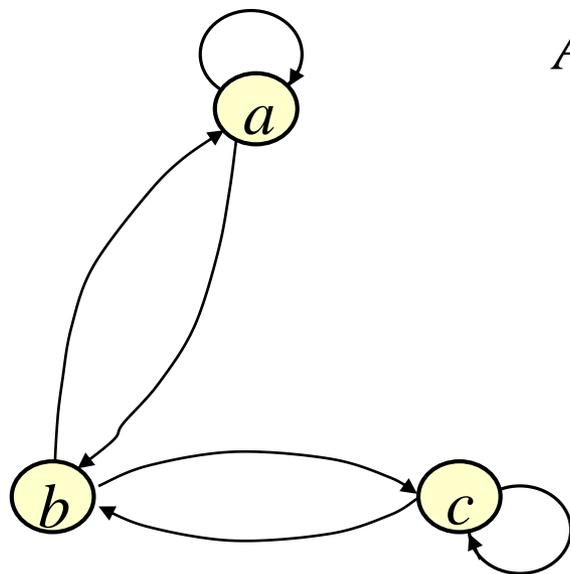


对称性与逆关系

- R 是集合 A 上的对称关系 $\Leftrightarrow R^{-1}=R$
 - \Rightarrow 证明一个集合等式 $R^{-1}=R$
 - 若 $(a,b) \in R^{-1}$, 则 $(b,a) \in R$, 由 R 的对称性可知 $(a,b) \in R$, 因此: $R^{-1} \subseteq R$; 同理可得: $R \subseteq R^{-1}$;
 - \Leftarrow 只需证明: 对任意的 (a,b) 若 $(a,b) \in R$, 则 $(b,a) \in R$



对称关系的有向图和0-1矩阵



$A = \{a, b, c\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



关系的性质：传递性 transitivity

- 集合 A 上的关系 R 是
 - 传递的 transitive: 若 $(a,b) \in R, (b,c) \in R$, 则 $(a,c) \in R$
- 设 $A = \{1,2,3\}, R \subseteq A \times A$
 - $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ 传递的
 - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是非传递的
 - $\{(1,3)\}$?
 - \emptyset ?

关系 R 是传递关系 $\Leftrightarrow \forall (a,b,c) ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$

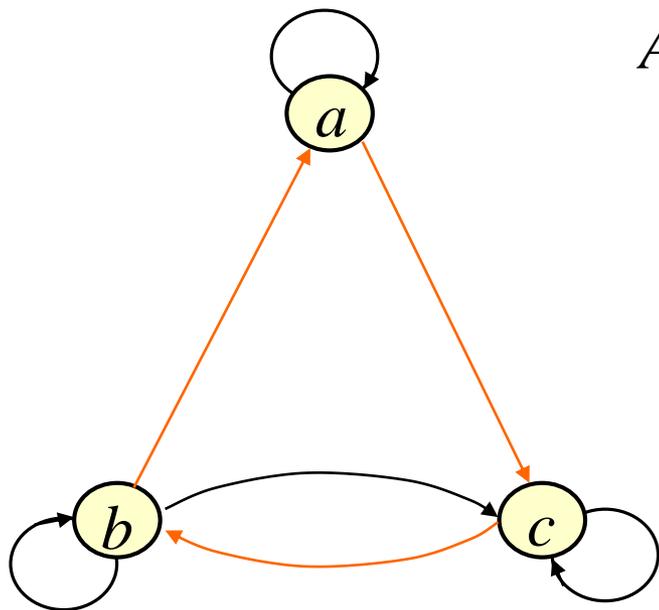


传递性与关系的乘幂

- 关系的复合(乘)运算满足结合律, 可以用 R^n 表示
$$R \circ R \circ \dots \circ R \quad (n \text{ 是正整数})$$
- 命题: $(a, b) \in R^n$ 当且仅当: 存在 $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in A$, 满足:
$$(a, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-2}, t_{n-1}), (t_{n-1}, b) \in R.$$
 - 对 $n \geq 1$ 用数学归纳法: $n=1$, trivial. 奠基 $n=2$, 直接由关系复合的定义可得; 归纳基于: $R^n = R^{n-1} \circ R$
- 集合 A 上的关系 R 是传递关系 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
 - 必要性: \Rightarrow 任取 $(a, b) \in R^2$, 根据上述命题以及 R 的传递性可得 $(a, b) \in R$
 - 充分性: \Leftarrow 若 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R^2$, 由 $R^2 \subseteq R$ 可得: $(a, c) \in R$, 则 R 是传递关系



传递关系的有向图和0-1矩阵



$A = \{a, b, c\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



一些常用关系的性质

	$=$	\leq	$<$	$ $	\equiv_3	\emptyset	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓



关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗



小结

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
 - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
 - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
 - 图特征；矩阵特征

作业

- 见课程网站

