数域的构造

Wang-Zhou Dai

<2024-03-31 Sun>

Contents

1 整数，有理数和可数无穷集合 1
1.1 等价关系 1
1.2 等价类 1
1.3 商集 1
1.4 整数 2
1.4.1 整数上的序和运算 2
1.5 有理数 2
1.5.1 有理数上的序和运算 2
1.6 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 是可数的 3
1.6.1 稠密性（dense） 3
2 实数集与不可数集合 3
2.1 有理数的缺陷 3
2.2 戴德金分割 3
2.3 实数的序和运算 4

1 整数，有理数和可数无穷集合

假设我们已经有自然数的标准模型 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; +, \cdot)$，要利用 FOL 构造更复杂的数域。

整数中的负数部分需要通过减法来构造，然而我们并没有定义过自然数的“减法”。由于它在自然数集合中不是一个良定的函数（没有封闭性），只能通过其他运算（加法）来构造。

这需要用到 **等价类**和 **商集**的定义。

1.1 等价关系

定义：如果集合 S 上的一个二元关系 $\sim$ 满足以下性质：

1. 自反性（反身性，reflexive）：$\forall_{a\in S}\,(a \sim a)$；
2. 对称性（symmetric）：$\forall_{a,b\in S}\,(a \sim b \leftrightarrow b \sim a)$；
3. 传递性（transitive）：$\forall_{a,b,c\in S}\,((a \sim b \wedge b \sim c) \rightarrow a \sim c)$；

那么称 $\sim$ 为 S 上的一个 **等价关系**。

1.2 等价类

定义：设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系。任给 $a \in S$，令

$$[a] = \{x \in S \mid x \sim a\},$$

把 S 的这个子集称为 a 的等价类，a 被称为 $[a]$ 的 **代表元**。

1.3 商集

定义：若 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系，则所有等价类组成的集合称为 S 对于 $\sim$ 的 **商集**，记为 $S/\sim$。

1.4 整数

至此，我们可以开始从自然数标准模型定义整数。

定义：令 $\sim$ 是如下定义的集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的等价关系

$$(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2)\quad \text{当且仅当}\quad m_1+n_2=m_2+n_1,$$

整数集合定义为商集 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$。

该等价类大概长成这样：

$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	...
$0_\mathbb{Z}$	(0,0)	(1,1)	(2,2)	...
$1_\mathbb{Z}$	(1,0)	(2,1)	(3,2)	...
$-1_\mathbb{Z}$	(0,1)	(1,2)	(2,3)	...
$2_\mathbb{Z}$	(2,0)	(3,1)	(4,2)	...
$-2_\mathbb{Z}$	(0,2)	(1,3)	(2,4)	...
...	...	...	...	...

我们将 $\mathbb{Z}$ 看作 $\mathbb{N}$ 的 **扩张**，但这并不意味着 $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ 。而是说 $\mathbb{N}$ 可以“嵌入”到 $\mathbb{Z}$ 中。

1.4.1 整数上的序和运算

定义：

- **序**：
$$[m_1,n_1]\leq_\mathbb{Z}[m_2,n_2]\leftrightarrow m_1+_\mathbb{N}n_2\leq_\mathbb{N}m_2+_\mathbb{N}n_1$$
- **加法**：
$$[m_1,n_1]+_\mathbb{Z}[m_2,n_2]\leftrightarrow[m_1+_\mathbb{N}m_2,n_1+_\mathbb{N}n_2]$$
- **乘法**：
$$[m_1,n_1]\cdot_\mathbb{Z}[m_2,n_2]\leftrightarrow[m_1\cdot_\mathbb{N}m_2+n_1\cdot_\mathbb{N}n_2,m_1\cdot_\mathbb{N}n_2+m_2\cdot_\mathbb{N}n_1]$$

1.5 有理数

定义：令 $\mathbb{Z}^+=\{a\in\mathbb{Z}\mid a>_\mathbb{Z}0_\mathbb{Z}\}$ 。如果 $\sim$ 是集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$ 上的如下定义的等价关系

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\quad \text{当且仅当}\quad a_1\cdot_\mathbb{Z}b_2=a_2\cdot_\mathbb{Z}b_1,$$

则有理数集合 $\mathbb{Q}$ 就定义为商集 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+/\sim$。

该等价类大概长成这样：

$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$	...
$0_\mathbb{Q}$	(0,0)	(1,0)	(-1,0)	...
$1_\mathbb{Q}$	(1,1)	(2,2)	(3,3)	...
$-1_\mathbb{Q}$	(-1,1)	(-2,2)	(-3,3)	...
$1/2_\mathbb{Q}$	(1,2)	(2,4)	(3,6)	...
$-1/2_\mathbb{Q}$	(-1,2)	(-2,4)	(-3,6)	...
...	...	...	...	...

可以证明，$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的 **扩张**。

1.5.1 有理数上的序和运算

定义：

- **序**：
$$[a_1,b_1]\leq_\mathbb{Q}[a_2,b_2]\leftrightarrow a_1\cdot_\mathbb{Z}b_2\leq_\mathbb{Z}a_2\cdot_\mathbb{Z}b_1$$
- **加法**：
$$[a_1,b_1]+_\mathbb{Q}[a_2,b_2]\leftrightarrow[a_1\cdot_\mathbb{Z}b_2+_\mathbb{Z}a_2\cdot_\mathbb{Z}b_1,b_1\cdot_\mathbb{Z}b_2]$$
- **乘法**：
$$[a_1,b_1]\cdot_\mathbb{Q}[a_2,b_2]\leftrightarrow[a_1\cdot_\mathbb{Z}a_2,b_1\cdot_\mathbb{Z}b_2]$$

1.6 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 是可数的

定理：可数集合上的等价关系有至多可数个等价类。

Proof. 显然，如果集合 X 是可数的且 $\sim$ 是其上的等价关系，则 $f(x) = [x]$ 是 X 到 $X/\sim$ 的满射。因此 $X/\sim$ 是至多可数的。 □

定理：整数集合 $\mathbb{Z}$ 和有理数集合 $\mathbb{N}$ 是可数无穷的。

Proof. 它们都是可数集合上的等价类，且它们是无穷的。 □

1.6.1 稠密性（dense）

定义：线序集 $(X, \leq)$ 是 **稠密的**，如果它至少有两个元素，并且对任意 $a, b \in X$，如果 $a < b$，则存在 $x \in X$ 满足 $a < x < b$。

显然，有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是 **稠密的**，且它是 **可数无穷的**，它 **没有最大最小元**。可以证明，有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是满足这三个性质的线序集的“代表”。即其他拥有这些性质的集合都与它 **局部同构**。

2 实数集与不可数集合

早在古希腊时代，数学家就发现有理数是不够的，如正方形对角线与其边长的比就不能用有理数表示。这导致了一个结果，有理数里存在许多“洞”。

以数 $\sqrt{2}$ 为例。记两个集合 $L = \{l \in \mathbb{Q} \mid l^2 <\}$ 和 $R = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 > 2\}$。由于 2 不是任意有理数的平方，所以在 $\mathbb{Q}$ 中，L 和 R 之间没有元素。但实数集不同，在区间 $(-\infty, \sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, \infty)$ 之间确实存在一个元素 $\sqrt{2}$。

2.1 有理数的缺陷

定义：线序集 $(X, \leq)$ 如果满足对任意 X 的非空子集 Y，如果 Y 有上界，则 Y 在 X 中有上确界，则称 X 有 **最小上界性质**。

- 在数学分析里有时候叫 **完备性**。

定理：有理数集合 $\mathbb{Q}$ 没有最小上界性质。

Proof. 令 $A = \{p \mid p \text{是正有理数且} p \cdot p < 2\}$。$A$ 在 $\mathbb{Q}$ 中显然由上界。我们将证明 A 没有上确界。令 $B = \{p \mid p \text{是正有理数且} p \cdot p > 2\}$。现在只需证明 A 没有最大元且 B 没有最小元，即：

$$\forall_{p \in A} \exists_{q \in A} \quad (q > p)$$
$$\forall_{p \in B} \exists_{q \in B} \quad (q < p)$$

对任意有理数 $p > 0$，令

$$q = p - \frac{p \cdot p - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2},$$
$$q \cdot q - 2 = \frac{2(p \cdot p - 2)}{(p + 2) \cdot (p + 2)}$$

如果 $p \in A$，那么 $p \cdot p - 2 < 0$，根据上式 $q \in A$ 且 $p < q$；若 $p \in B$，则 $p \cdot p > 0$，根据上式 $q \in B$ 且 $p > q$。 □

为了将实数里的这些洞补上，我们要通过一个包含无穷个有理数的集合来描述这些“洞”。

2.2 戴德金分割

整数可表示为自然数的有序对，有理数可表示为整数的有序对。但是，实数不能表示为有理数的有序对。实际上，每个实数需要用一个有理数的无穷集合表示。

定义：如果集合 $A \subseteq \mathbb{Q}$ 满足：

1. $A \neq \emptyset$ 且 $A \neq \mathbb{Q}$；

2. A 是向下封闭的，即若 $p \in A$ 且 $q < p$，则 $q \in A$；
3. A 没有最大元：如果 $p \in A$，则存在 $q \in A$，$p < q$；

就称 A 是 **戴德金分割**。全体戴德金分割的集合记为 $\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 的元素又称为 **实数**。

注：

1. 有了戴德金分割，我们就能用它（一个集合来）定义实数。注意，定义实数时不能超前地用实数内的运算（因为它们还不存在！），只能用有理数域的运算。
   - $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \cdot_{\mathbb{Q}} p < 2 \vee p < 0\}$（小于零是必须的，因为戴德金分割没有最小元）
   - 不能定义成 $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < \sqrt{2}\}$。
2. 根据以上定义，如果 $p \in A$ 但 $q \notin A$，则 $p < q$。而如果 $p \notin A$ 且 $p < q$，则 $q \notin A$。
3. 我们一般用 x, y, z 表示实数。而对于任意有理数 p，定义相应的实数 $p_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q <_{\mathbb{Q}} p\}$

2.3 实数的序和运算

1. 实数集 $\mathbb{R}$ 上的序定义为 $x_1 \leq_{\mathbb{R}} x_2$ 当且仅当 $x_1 \subseteq x_2$；
   - 可以证明实数集合 $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ 有最小上界性质。
2. 实数集 $\mathbb{R}$ 上的加法定义为 $x +_{\mathbb{R}} y = \{p +_{\mathbb{Q}} q \mid p \in x, q \in y\}$；
3. 实数集 $\mathbb{R}$ 上的乘法定义为：如果 $x > 0, y > 0$，则

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = \{r \mid r \leq p \cdot_{\mathbb{Q}} q \text{ 其中 } p \in x, q \in y \text{ 并且 } p, q \geq_{\mathbb{Q}} 0\};$$

   如果 $x = 0$ 或者 $y = 0$，则 $x \cdot_{\mathbb{R}} y = 0$；其他情况都由 x, y 都大于 0 的情况定义：

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = \begin{cases} (-x) \cdot (-y), & \text{若 } x < 0 \wedge y < 0; \\ -((-x) \cdot y), & \text{若 } x < 0 \wedge y > 0; \\ -(x \cdot (-y)), & \text{若 } x > 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$