数理逻辑

03 - 一阶逻辑

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

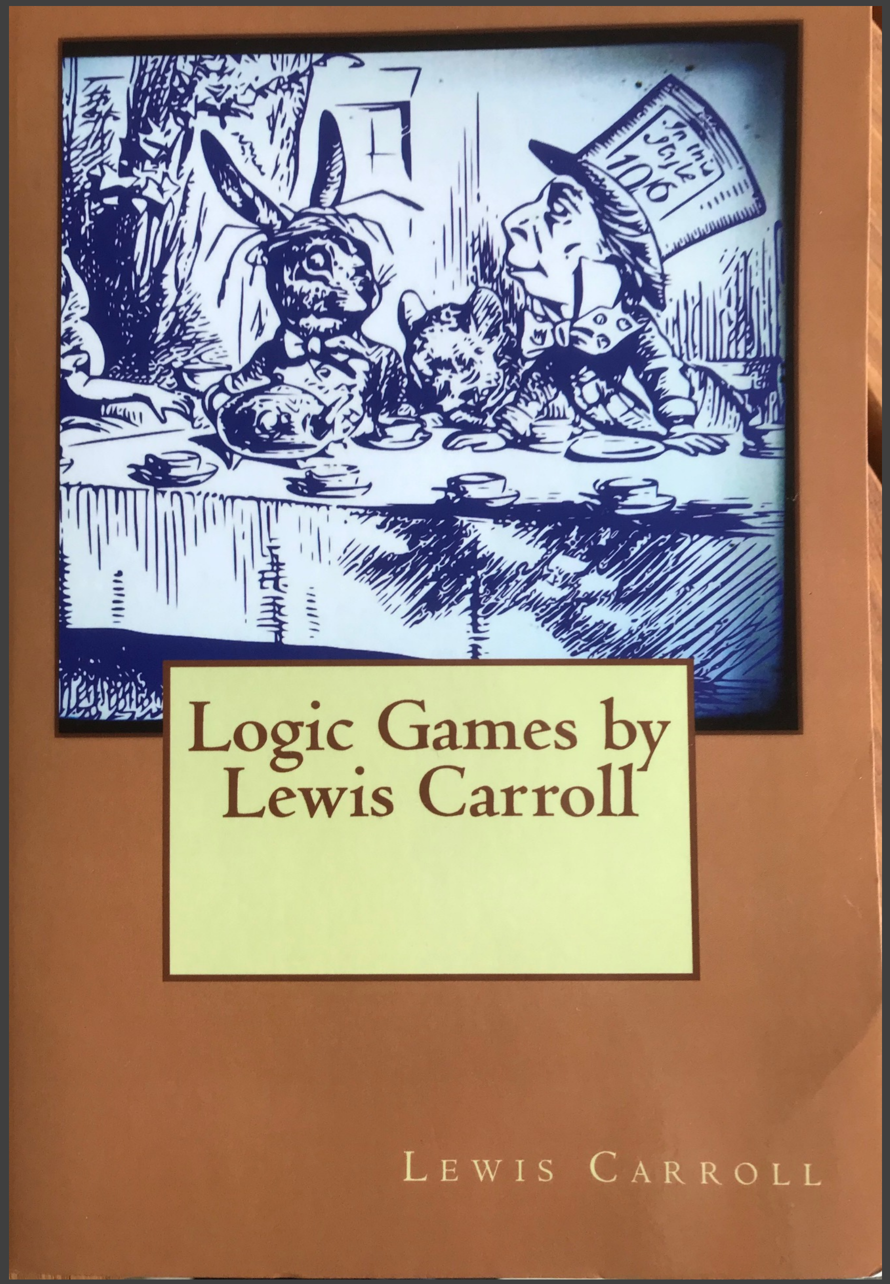
2024年 - 春季

https://daiwz.net

Lewis 的谜题

Games from Lewis Carroll

1. No kitten, that loves fish, is unteachable;
2. No kitten without a tail will play with a gorilla;
3. Kittens with whiskers always love fish;
4. No teachable kitten has green eyes;
5. No kittens have tails unless they have whiskers.
6. Q: Kitten with green eyes will play with a gorilla?



语法

一阶语言

什么是**一阶（first-order）**？

一阶语言

逻辑符号

1. 标点符号：“(”，“)”，“,”
2. 联结词：$\to$，$\neg$
   » 其它联结词：$\wedge, \vee, \leftrightarrow$
3. 变元（可数无穷个）：$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots$
4. 量词：$\forall$
   » 其它量词：$\exists$
5. 等词（可选）：$=$

非逻辑符号 （signature）

1. n元谓词（可数无穷个），$n \geq 1$: $A_0^n, A_1^n, \ldots$
2. 常元（可数无穷个）：$c_0, c_1, \ldots$
   » 特殊常元：$\top, \perp, T, F$
3. n元函数（可数无穷个）：$f_0^n, f_1^n, \ldots$

一阶语言的例子

纯一阶逻辑（*pure First-Order Logic, FOL*）

常元	$c_0, c_1, \ldots$
n元谓词	$A_0^n, A_1^n, \ldots$
n元函数	$f_0^n, f_1^n, \ldots$
等词	无

集合论

常元	$\emptyset$
2元谓词	$\in$
n元函数	无
等词	有

一阶语言的例子

初等数论

常元	$\mathbf{0}$
谓词	$<$
1元函数	$\mathbf{S}$
2元函数	$+, \times, \mathbf{E}$
等词	有

- 注：$\mathbf{S}, \mathbf{E}$分别为后继和指数函数

上面的例子里，我们只是按照习惯来定义各个language signature中谓词与函数的**记号**，例如$<, \in, \leq$只是A_0^2；$\mathbf{0}, \emptyset$为c_0；$+, \times, \mathbf{E}$为f_0^2, f_1^2, f_3^2

FOL之于数学

因为:

- 一阶语言包含集合论语言
- 一切数学都可被嵌入在集合论中

所以:

1. 集合论的**一阶语言**能够描述任意数学
2. 一切数学定理都来自对集合论公理的**逻辑推导**

一阶逻辑语言足以描述一切数学结构吗?

FOL的例子 [Enderton, pp.73]

1. “所有苹果都坏了”

$$\forall v_1(A(v_1) \to B(v_1))$$

2. “有些苹果坏了”

$$\exists v_1(A(v_1) \wedge B(v_1))$$

$$\neg\forall v_1(\neg(\neg(A(v_1) \to (\neg B(v_1)))))$$

3. 所有 X 都属于 Y
   - » $\forall v_1(X(v_1) \to Y(v_2))$
   - » $\forall v_1(X(v_1) \wedge Y(v_2))$（语气太强：所有东西都是 X 而且也是 Y）
4. 存在 X 属于 Y
   - » $\exists v_1(X(v_1) \wedge Y(v_1))$
   - » $\exists v_1(X(v_1) \to Y(v_1))$（语气太弱：存在一些东西，只有当它是 X 时，它才是 Y）

项

定义 2.1（项，*term*）[Enderton, pp.74]：

每个n元函数符号f对应一个n元项构造算子$\mathcal{F}_f$：

$$\mathcal{F}_f(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = f\epsilon_1 \cdots \epsilon_n$$

一阶逻辑的项的集合是常元和变元符号经过（0次或多次）$\mathcal{F}_f$运算得到的表达式集合

例如：

$$\begin{aligned}
&+\boldsymbol{v}_2\mathbf{S0},\\
&\mathbf{SSSS0},\\
&+\mathbf{E}\boldsymbol{v}_1\mathbf{SS0}\,\mathbf{E}\boldsymbol{v}_2\mathbf{SS0}.
\end{aligned}$$

原子公式

定义 2.2（原子公式，*atomic formula*，*atom*）[Enderton, pp.74]：

一阶逻辑的原子公式是如下形式的表达式

$$Pt_1 \cdots t_n$$

其中 P 是 n 元谓词，$t_1, \ldots, t_n$ 是项

例如：

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2, \\
&< \mathbf{SS0}\ \mathbf{SSSS0}, \\
&= \mathbf{E}\boldsymbol{v}_1\mathbf{SS0}\ \mathbf{E}\boldsymbol{v}_2\mathbf{SS0}.
\end{aligned}
$$

合式公式

定义 2.3（合式公式，*well-formed formula*，*wff*）[Enderton, pp.75]：

一阶逻辑的合式公式集合是原子公式通过运用0次或多次公式构造算子 $\mathcal{E}_{\neg}, \mathcal{E}_{\leftarrow}, \mathcal{Q}_i (i = 1, 2, \ldots)$形成的表达式集合。其中

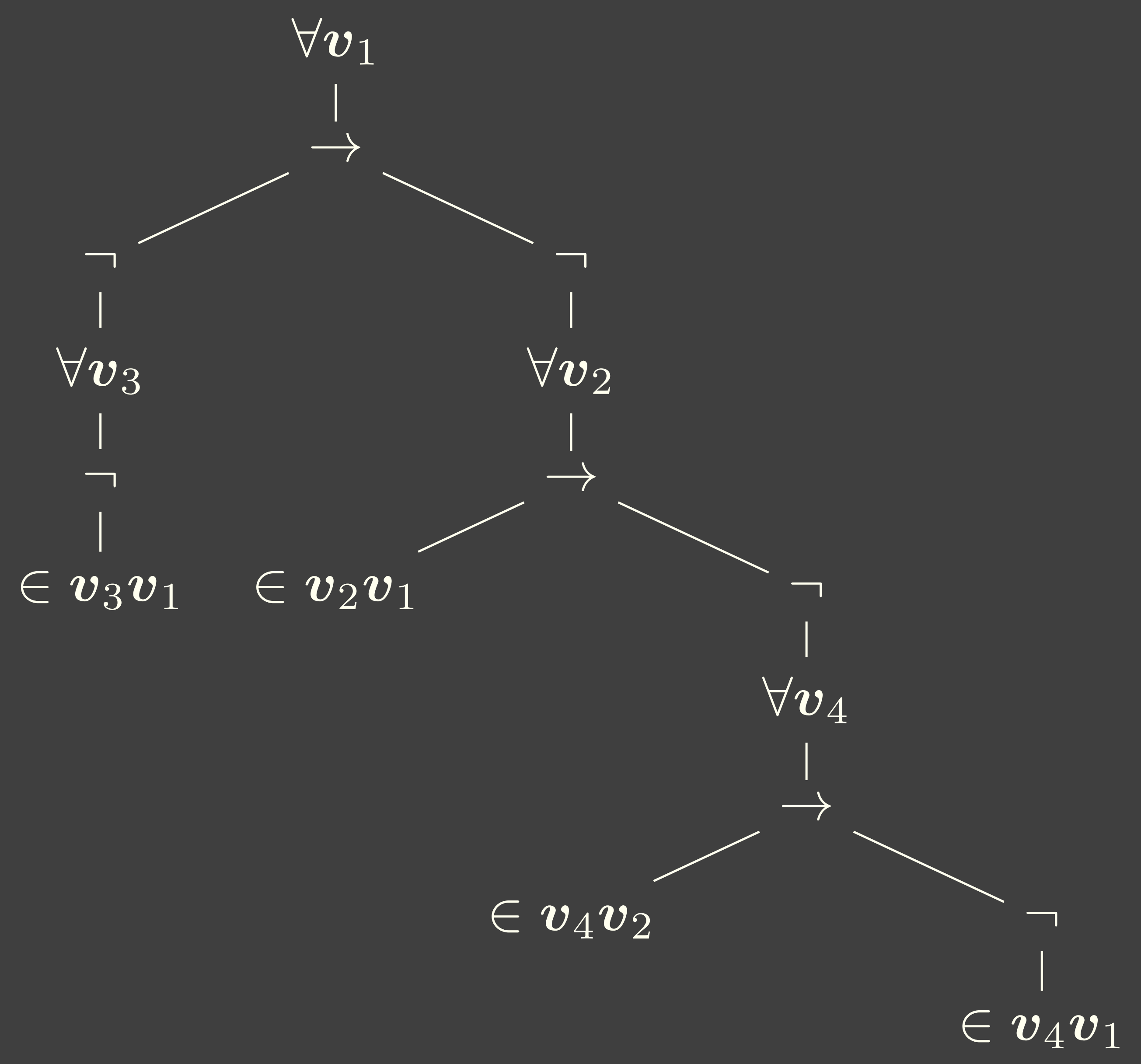
$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\neg}(\gamma) &= (\neg \gamma) \\
\mathcal{E}_{\leftarrow}(\gamma, \delta) &= (\gamma \leftarrow \delta) \\
\mathcal{Q}_i(\gamma) &= \forall \boldsymbol{v}_i \gamma
\end{aligned}
$$

例如：

- $\neg \boldsymbol{v}_i$ 不是wff
- $\forall \boldsymbol{v}_1((\neg \forall \boldsymbol{v}_3(\neg \in \boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_1)) \to (\neg \forall \boldsymbol{v}_2(\in \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_1 \to (\neg \forall \boldsymbol{v}_4(\in \boldsymbol{v}_4 \boldsymbol{v}_2 \to (\neg \in \boldsymbol{v}_4 \boldsymbol{v}_1))))))$ 是wff（ZFC的正则公理）

合式公式

$$\forall \boldsymbol{v}_1((\neg\forall \boldsymbol{v}_3(\neg \in \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1)) \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_2(\in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1 \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_4(\in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_2 \to (\neg \in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1))))))$$



自由变元

- $\forall \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1$
  - “所有集合都是$\underline{\qquad}_1$的元素”
- $(\neg\forall \boldsymbol{v}_1(\neg\forall \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1))$
  - “存在一个集合，任意集合都是它的元素”
  - 记$\exists x\,\alpha \equiv \neg\forall x\,(\neg\alpha)$

自由变元

$$\varphi \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j$$

自由变元

定义2.4（自由出现，*occur free*）[Enderton, pp.76]：

考虑一个变元$\boldsymbol{x}$，我们递归地定义：

1. 对于原子公式α，$\boldsymbol{x}$在α中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中出现
2. $\boldsymbol{x}$在$(\neg\alpha)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中自由出现
3. $\boldsymbol{x}$在$(\alpha\to\beta)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中自由出现或在β中自由出现
4. $\boldsymbol{x}$在$(\forall \boldsymbol{v}_i\alpha)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在$\alpha$中出现且$\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{v}_i$

若一个变元如果不是自由（*not free*）的，则我们称它为（受）约束的（*bounded*）。若一个wff没有自由出现的变元，则称它是闭公式（*closed wff*）或语句（*sentence*）

变元替换

$$(\varphi)_2^k = (\sum_{j=0}^{k} a_j)_2^k = \sum_{j=0}^{2} a_j$$

变元替换

$$(\varphi)_i^j = (\sum_{j=0}^{k} a_j)_i^j = \sum_{j=0}^{k} a_j$$

变元替换

定义 2.5a（替换，*substitution*）[Enderton, pp.112]

wff中的变元替换（substitution）可递归地定义如下：

1. 对任意原子公式α，α_t^x是用项t代替α中出现的所有x后所得的表达式
2. $(\neg\alpha)_t^x = (\neg\alpha_t^x)$
3. $(\alpha \to \beta)_t^x = (\alpha_t^x \to \beta_t^x)$
4. $(\forall y\, \alpha)_t^x = \begin{cases} \forall y\, \alpha, & \text{if } x = y \\ \forall y\, (\alpha)_t^x, & \text{if } x \neq y \end{cases}$

我们记这个替换算子为$\theta = [t/x]$，则$\alpha_t^x = \alpha \circ \theta = \alpha\theta$

变元替换

$$[\sum_{j=0}^{n}(k \cdot a_j)]_{f(j)}^{k} \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{n}(f(j) \cdot a_j)$$

可替换

定义 2.5b（可替换，*substitutable*）[Enderton, pp.112]

我们定义项t对于α中的变元x是可替换的（substitutable）如下：

1. 对任意原子公式α，项t对于α中出现的所有x都是可替换的（原子公式无量词）
2. 项t对于$(\neg\alpha)$中的x是可替换的，当且仅当它对α中出现的x是可替换的
3. 项t对于$(\alpha\to\beta)$中的x是可替换的，当且仅当它对α和β中出现的x均是可替换的
4. 项t对于$\forall y\,\alpha$中的x是可替换的当且仅当：
    - x在$\forall y\,\alpha$中是约束出现的（为保证替换后不影响原公式意义），或者
    - y在t中未出现（为保证t中的变元不在替换后被$\forall y$量化）且t对于α中的x是可替换的

替换的例子

一阶逻辑的 Hilbert 系统里有一条公理模式：

$$\forall x\, \alpha \to \alpha_t^x$$

其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的，那么：

- 以下 wff 是该公理模式的一个实例

$$\forall \boldsymbol{v}_3\, (\forall \boldsymbol{v}_1\, (A\boldsymbol{v}_1 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, A\boldsymbol{v}_2) \to (A\boldsymbol{v}_2 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, A\boldsymbol{v}_2))$$

  - 其中 α 是 $(A\boldsymbol{v}_1 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, A\boldsymbol{v}_2)$，$x$ 是 $\boldsymbol{v}_1$，t 是 $\boldsymbol{v}_2$

- 以下 wff 则不是该公理模式的实例

$$\forall \boldsymbol{v}_1\, \forall \boldsymbol{v}_2\, B\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \to \forall \boldsymbol{v}_2\, B\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2$$

  - 因为 $\boldsymbol{v}_2$ 在 $\forall \boldsymbol{v}_1\, \forall \boldsymbol{v}_2\, B\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ 中受约束，因此它不能替换这里的 $\boldsymbol{v}_1$

证明

证明的定义

定义2.6（定义1.19-21）（*proof, deduction, or derivation*）[Enderton, pp.111]:

从Γ到φ的证明（推导）是一个有穷的wff序列$\langle\alpha_0,\ldots,\alpha_n\rangle$，其中$\alpha_n$就是$\varphi$且对任意$k\leq n$有

1. α_k属于$\Gamma\cup\Lambda$（Λ为公理集），或者
2. α_k是由序列中位于它前面的两个wff经过MP规则推导而得；即存在$i,j\leq k$有α_j为$\alpha_i\to\alpha_k$

若以上证明存在，我们就说φ是从Γ出发可证的（*provable, deducible or derivable*），或称φ是Γ中的定理（*theorem of* Γ），记为$\Gamma\vdash\varphi$

一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Enderton, pp.110]：

令α与β为FOL wff，x和y为变元。FOL的公理集Λ是具有以下形式的wff的所有概括：

1. 重言式（例如定义1.22中的公理）
2. $\forall x\, \alpha \to \alpha^x_t$，其中$t$对于$\alpha$中的$x$是可替换的
   - 它的逆否命题也是公理：$\beta \to \exists x\, \beta^t_x$，其中$x$不在$t$中出现
3. $\forall x\, (\alpha \to \beta) \to (\forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta)$
4. $\alpha \to \forall x\, \alpha$，其中$x$不在$\alpha$中自由出现
5. （有等词时）$x = x$
6. （有等词时）$(x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中$\alpha$为原子公式，$\alpha'$为对$\alpha$中的$x$进行0次或多次替换后得到的wff

一阶逻辑中的公理系统

（续）定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）：

该公理系统中只有一条MP推理规则，即若推导中已有$\beta \to \alpha$和β，那么α也是正确的，即:

$$\beta, (\beta \to \alpha) \vdash \alpha$$

一阶逻辑推导的例子

试证：公理 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明：

Lemma 1：$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$，根据演绎定理，即证$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

1.	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$	AX 1.22.9
2.	$\alpha \to \beta$	Hyp
3.	$(\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$	1, 2 MP
4.	$\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta)$	Ax, 1.22.7
5.	$\neg\beta$	Hyp
6.	$\alpha \to \neg\beta$	4, 5 MP
7.	$\neg\alpha$	3, 6 MP

一阶逻辑推导的例子

试证：定义2.7.2的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明（Cont'd）：

Lemma 2（*syllogism*）:$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$，用演绎定理易证

Lemma 3:$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$，根据演绎定理，即证$\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$

1.	α	Hyp
2.	$\alpha \to (\neg\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$	Ax 1.22.3
3.	$\alpha \to (\neg\alpha \to \perp)$	Rewrite/Def
4.	$\neg\alpha \to \perp$	1, 3 MP
5.	$(\neg\alpha \to \perp) \to \neg\neg\alpha$	Ax 1.22.13
6.	$\neg\neg\alpha$	4, 5 MP

一阶逻辑推导的例子

试证：定义 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明（Cont'd）：

1.	$\forall y \neg Py \to \neg Px$	AX 2.7.2
2.	$(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (\neg\neg Px \to \neg\forall y \neg Py)$	Lemma 1
3.	$\neg\neg Px \to \neg\forall y \neg Py$	1, 2 MP
4.	$\neg\neg Px \to \exists y Py$	Rewrite 3
5.	$(Px \to \neg\neg Px) \to [(\neg\neg Px \to \exists y Py) \to (Px \to \exists y Py)]$	Lemma 2
6.	$Px \to \neg\neg Px$	Lemma 3
7.	$(\neg\neg Px \to \exists y Py) \to (Px \to \exists y Py)$	5, 6 MP
8.	$Px \to \exists y Py$	4, 7 MP

Q.E.D.

一阶逻辑推导的例子2

试证：

$$\vdash (\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to \forall x\, (Px \land Qx)$$

证明：

Lemma：$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to (\beta \land \gamma)$，根据演绎定理和公理1.22.3易证

1.	$(\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to \forall x\, Px$	Ax 1.22.1
2.	$\forall x\, Px \to Pt$	AX 2.7.2
3.	$(\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to Pt$	1, 2 Syl.
4.	$(\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to \forall y\, Qy$	Ax 1.22.1
5.	$\forall y\, Qy \to Qt$	AX 2.7.2
6.	$(\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to Qt$	4, 5 Syl.
7.	$(\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to (Pt \land Qt)$	3, 6 Lemma
8.	$(\forall x\, Px \land \forall y\, Qy) \to \forall x\, (Px \land Qx)$	Ded. and Gen.

Q.E.D.

一阶逻辑的元定理

演绎定理

引理2.8（T规则）[Enderton, pp.118]:

若$\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$且$\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$重言蕴涵$\beta$（即$(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots \to (\alpha_n \to \beta)))$为重言式），则$\Gamma \vdash \beta$

- 通过n次MP推理可证

定理2.9（演绎定理）[Enderton, pp.118]:

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$当且仅当$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

- **证明**：见命题逻辑的演绎定理（1.25）

一些其它的元定理

推论 2.10（逆否命题，*Contraposition*）[Enderton, pp.119]：

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当且 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

- 前面的例子中已证

推论 2.11（归谬，*Reductio ad Absurdum*，*RAA*）[Enderton, pp.119]：

若 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，则 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

- 证明过程与命题逻辑的定理 1.30 类似

概括定理

定理 2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

证明：

令φ存在一个证明$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \varphi \rangle$，利用对证明长度施归纳即可证明该定理。

- **奠基：** 当证明长度为 1 时，$\varphi \in \Gamma$，根据公理 2.7.4 可知当x不在φ中自由出现时有$\varphi \to \forall x\, \varphi$，根据演绎定理可得$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

概括定理

定理2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

证明（续）：

- **归纳**：假设$j < i$时对任意j有该结论成立，下面对于α_i分情况讨论：
  - $\alpha_i \in \Lambda$，根据定义有$\forall x\, \alpha_i$依然是逻辑公理，显然有$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_i$（尽管$x$可能在$\alpha_i$中出现，但不影响结论）
  - $\alpha_i \in \Gamma$，与奠基情况一致
  - α_i由α_j与$\alpha_j \to \alpha_i$通过MP规则得到。由归纳假设有$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_j$且$\Gamma \vdash \forall x\, (\alpha_j \to \alpha_i)$。对公理2.7.3

$$\forall x\, (\alpha_j \to \alpha_i) \to (\forall x\, \alpha_j \to \forall x\, \alpha_i)$$

运用两次MP规则即可得$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_i$ Q.E.D.

概括定理

定理2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

- 可见，公理2.7.3与2.7.4存在的作用就是为了证明概括定理
  - **2.7.3** $\forall x\,(\alpha \to \beta) \to (\forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta)$
  - **2.7.4** $\alpha \to \forall x\, \alpha$，其中$x$不在$\alpha$中自由出现
- 概括定理在有些逻辑系统中被作为推理规则（如Gentzen的LK自然演绎系统等）
  - 若能对x不进行假设（约束）即可证明命题__x__，那么可以说“由于x的任意性，我们有$\forall x$ __x__成立”
- 常见的用法：“*without loss of generality*”（不失一般性，*WLOG*）
  - 用特例代替一般性推理，最后概括（同时使用公理2.7.2与概括定理）

另一套公理系统

定义 2.7'（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Open Logic, section 10.1]：

公理（Λ）：

1. 命题逻辑公理（定义 1.22）的 FOL 概括
2. 关于量词的公理：对闭项（*closed term*，即不含变元的项）有
   » $\forall x\,\beta \to \beta^x_t$
   » $\beta(t) \to \exists x\,\beta$ [Enderton, pp. 124] (*Rule EI*)

推理规则：

1. MP 规则
2. 关于量词的推理规则（QR）：
   » 若 $\beta \to \alpha(a)$ 已经出现在证明序列中，且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现，那么 $\beta \to \forall x\,\beta(x)$ 是正确的
   » 若 $\alpha(a) \to \beta$ 已经出现在证明序列中，且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现，那么 $\exists x\,\beta(x) \to \beta$ 是正确的

概括定理

例:

1. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash Qc$，显然
2. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash Qy$，和1类似
3. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash \forall y\, Qy$，不失一般性
4. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash \forall x\, Qx$，约束变元换名

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]：

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明：

令$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \varphi \rangle$是从$\Gamma$到$\varphi$的一个证明，令$y$为第一个不在任意$\alpha_i, i \in \{0, \ldots, n\}$中出现的变元。那么可以断言

$$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$$

是一个从Γ到φ^c_y的一个推演。为证明这个断言，需验证每个$(\alpha_k)^c_y$要么属于$\Gamma \cup \Lambda$，要么根据MP规则从$\{(\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_{k-1})^c_y\}$中推导而来。

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]：

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明（续）：
下面对未作替换的α_k分情况讨论：

1. $\alpha_k \in \Gamma$：因此c不在α_k中出现，可知$(\alpha_k)^c_y = \alpha_k \in \Gamma$
2. $\alpha_k \in \Lambda$：即α_k为定义 2.7 中的逻辑公理，那么在$(\alpha_k)^c_y$依然是一条逻辑公理（Why?），因此$(\alpha_k)^c_y \in \Lambda$
   - 若α_k是命题逻辑中的重言式，替换其中常量得到的仍然是重言式。例如$Pc \to \neg\neg Pc$，显然有$(Pc \to \neg\neg Pc)^c_y = Py \to \neg\neg Py$，它仍是逻辑公理
   - 若α_k是$\forall x\, \psi \to \psi^x_t$，那么$(\alpha_k)^c_y$就是$\forall x\, \psi^c_y \to (\psi^x_t)^c_y$。注意到$(\psi^x_t)^c_y$正是$(\psi^c_y)^x_{t^c_y}$，所以它也是逻辑公理。其它组的公理也容易验证
3. α_k是由α_i与$\alpha_j = (\alpha_i \to \alpha_k)$（$i, j < k$）用MP规则推出：那么有$(\alpha_j)^c_y = ((\alpha_i)^c_y \to (\alpha_k)^c_y)$，因此可知$(\alpha_k)^c_k$可由$(\alpha_i)^c_y$与$(\alpha_j)^c_y$经过MP规则导出

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]：

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明（续）：

由上面的推导可知，$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$ 的确是φ^c_y的一个推演。

令Φ为$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$中所有$\alpha_i \in \Gamma$构成的集合。

- 显然Φ是一个有穷集合，有y不在Φ中出现且$\Phi \vdash \varphi^c_y$
- 根据概括定理，$\Phi \vdash \forall y\, \varphi^c_y$，所以$\Gamma \vdash \forall y\, \varphi^c_y$

注意到概括定理的证明中不会引入新的常元，这样就可以得到一个从Γ到$\forall y\, \varphi^c_y$的证明，且c不出现在其中。 Q.E.D.

约束变元替换

我们想证：

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall y\, Pyy$$

由于$\forall x \forall y\, Pxy$中的$x$不能用$y$进行替换，所以它无法套用公理 2.7.2。

但如果我们有

$$\vdash \forall x \forall z\, Pxz \to \forall y\, Pyy$$

显然就会好证很多。

那么只需要有

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall x \forall z\, Pxz$$

就能证明最开始的结论。

Alphabetic Variants

定理2.14（约束变元替换定理，*Alphabetic Variants*）[Enderton, pp.126]:

令φ是一个wff，t是一个项，x是一个变元。总可以找到一个wff φ'，它和φ的差别仅在于约束变元，使得

1. $\varphi \vdash \varphi'$且$\varphi' \vdash \varphi$
2. t可以在φ'中无冲突地替换x

该定理的目的是当t无法被用来替换x时，可以通过对约束变元换名来实现合法替换。

证明概要:

1. 不失一般性，可固定t和x并递归地从φ构造φ'，通过结构归纳进行证明
   - 归纳假设为：应用构造算子前有$\varphi \vdash \varphi'$（或$\varphi' \vdash \varphi$）
2. 无量词情况较简单；对于有量词的情况构造$(\forall y\, \varphi)' = \forall z\, (\varphi')^y_z$，其中$z$不在$\varphi'$，$x$和$t$中出现，这时$t$便可用来替换其中的$x$（定理结论2成立）
3. 运用概括定理易证定理结论1成立

与等词有关的元定理

1. $\vdash \forall x\,(x = x)$
2. $\vdash \forall x \forall y\,(x = y \to y = x)$
3. $\vdash \forall x \forall y \forall z\,(x = y \to (y = z \to x = z))$
4. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\,(x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (Px_1x_2 = Py_1y_2)))$，$P$为一二元谓词
5. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\,(x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (fx_1x_2 = fy_1y_2)))$，$f$为一二元函数

语义

回顾：命题逻辑中的赋值

定义 1.12（truth assignment）：

对于命题符号集合 S，一个真值指派 v 是一个函数

$$v : S \to \{F, T\}$$

定义 1.12'（truth assignment, extended）：

1. v 是一个真值指派（赋值）指它是一个函数 $v : S \to \{F, T\}$，从而对于任何命题符号 $\mathbf{A}_i \in S$，$v(\mathbf{A}_i)$ 为 T 或 F
2. 对于任何真值指派 v，定义 $\bar{v} : \bar{S} \to \{F, T\}$ 如下
   - » $\bar{v}(\mathbf{A}_i) = v(\mathbf{A}_i), i \in \mathbb{N}$
   - » $\bar{v}(\neg\alpha) = B_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$
   - » $\bar{v}(\alpha \Box \beta) = B_{\Box}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)), \Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

目标：先为原子公式赋值，再为每个wff生成唯一的真值指派

FOL中的赋值

与“天生自带真值”的命题不同，在FOL中我们需要一些**来自外部的信息**才能达成以上目标：

1. 确定一些对象（*objects*），至少要有1个（因为有些公理对论域为空的语言不成立），作为被量词所量化的定义论域（*domain of discourse*）
2. 为论域中的每个对象指派一个FOL语言中的正式名字（即常元符号），作为对它的解释和索引（它与论域中的元素一一对应，自然也要非空）
3. 为论域中的每个k-元谓词/函数也指派一个FOL语言中的正式名字（谓词符号/函数符号）。这些符号对应于论域中一些k-元组（对于函数则是$k+1$-元组）构成的集合（可能是空集），本质上是谓词与函数的外延（*extension*），它们为这个外部结构提供基础的真值

» “*extension*”的定义详见ZFC中的“外延公理”

结构

定义 2.15（结构，*Structure*）[Enderton, pp.80]：

FOL 的一个结构 $\mathfrak{A}$ 是一个函数，它的定义域是 FOL 的量词符号及非逻辑符号（*signature*），并且满足下列条件：

1. $\mathfrak{A}$ 为量词 $\forall$ 指派一个非空集合 $|\mathfrak{A}|$ 作为论域（*domain* 或 *universe*）
2. $\mathfrak{A}$ 为每个 n-元谓词符号 P 指派一个 n-元关系 $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$
3. $\mathfrak{A}$ 为每个常元符号 c 指派一个 $|\mathfrak{A}|$ 中的元素 $c^{\mathfrak{A}}$
4. $\mathfrak{A}$ 为每个 n-元函数符号 f 指派一个 n-元函数 $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$

结构的例子

在集合论的FOL语言中，定义一个结构$\mathfrak{A}$如下：

- $|\mathfrak{A}|$为自然数集合
- $\in^{\mathfrak{A}}$为二元组集合$\{\langle m, n\rangle \mid m < n\}$

一个该语言中语句为

$$\exists x \forall y \neg y \in x$$

由于它在$\mathfrak{A}$中为真，我们称$\mathfrak{A}$是它的一个模型（*model*），记为

$$\models_{\mathfrak{A}} \exists x \forall y \neg y \in x$$

下面的语句在$\mathfrak{A}$下应该如何解释？$\mathfrak{A}$是它的模型吗？

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

可满足

我们在何种情况下才能说一个一般的FOL wff为**真**？

- 显然我们在自由变元没有赋值时无法下定论，因为它**不是命题**。例如$\varphi \equiv x \in 10$

因此，我们希望在给定一个变元赋值$s : V \to |\mathfrak{A}|$时，

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$$

当且仅当将φ中的自由变元x替换为$s(x) = c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$后，再按照$\mathfrak{A}$的规定进行“翻译”，所得的语句为**真**

- 例如$\varphi_5^x = 5 \in 10$

解释

定义 2.16（解释，*Interpretation*）[Enderton, pp.83; Hao et.al., 90]：

令$\mathfrak{A}$是FOL语言的结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个将变元映射到论域的函数。我们定义$\mathfrak{A}$和s满足（*satisfy*）wff φ，记为$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$（或者$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$），递归定义如下：

- **项的解释**：把对变元的赋值s扩展为对所有项的赋值。令T表示所有项构成的集合，递归定义项的赋值函数$\bar{s} : T \to |\mathfrak{A}|$如下

1. 对每一个变元符号x，$\bar{s}(x) = x$
2. 对每一个常元符号c，$\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
3. 若$t_1, \ldots, t_n$是项，且f是一个n-元函数符号，那么

$$\bar{s}(ft_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$$

解释

定义 2.16（解释，*Interpretation*）[Enderton, pp.83; Hao et.al., 90]：

令$\mathfrak{A}$是FOL语言的结构，$s: V \to |\mathfrak{A}|$是一个将变元映射到论域的函数。我们定义$\mathfrak{A}$和s满足（*satisfy*）wff φ，记为$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$（或者$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$），递归定义如下：

- **原子公式的解释**：由于原子公式的定义是非递归的，因此它的解释的定义也是非递归的
  1. 对于特殊的谓词“=”，我们有$\vDash_{\mathfrak{A}} = t_1t_2$当且仅当$\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$（注意，这两个=分别处在FOL和元语言中）
  2. 对其他每个n-元谓词符号P有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} Pt_1 \ldots t_n \quad \text{iff} \quad (\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$$

解释

定义 2.16（解释，*Interpretation*）[Enderton, pp.83; Hao et.al., 90]:

令$\mathfrak{A}$是FOL语言的结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个将变元映射到论域的函数。我们定义$\mathfrak{A}$和s满足（*satisfy*）wff φ，记为$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$（或者$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$），递归定义如下：

- **其它wff的解释**：根据wff的结构，递归定义如下：
  1. 若为原子公式，其定义如上
  2. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$当且仅当$\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$
  3. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)[s]$当且仅当$\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$或$\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$；或者以上两者均成立
  4. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi[s]$当且仅当对任意$d \in |\mathfrak{A}|$，我们有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]$，其中$s(x \mid d)$定义如下：

$$s(x \mid d)(y) = \begin{cases} s(y), & \text{if } y \neq x, \\ d, & \text{if } y = x. \end{cases}$$

例子 [Smith, pp.345]

定义一个FOL语言如下：

- 常元：m, n
- 一元谓词：F, G
- 二元谓词：L

考察下列语句的解释与真值：

1. $(\exists x\, Lmx \to Lmn)$
2. $\forall x\,(Gx \to (Lxm \lor \neg Lmx))$
3. $\forall x\,(Gx \to \exists y\, Lxy)$

对应的结构$\mathfrak{A}$如下：

- $|\mathfrak{A}|$：{Romeo, Juliet, Benedick, Beatrice}
- 常元指派：
  - m：Romeo
  - n：Juliet
- 谓词指派：
  - F：{Romeo, Benedick}
  - G：{Juliet, Beatrice}
  - L：{⟨Romeo, Juliet⟩, ⟨Juliet, Romeo⟩, ⟨Benedick, Beatrice⟩, ⟨Beatrice, Benedick⟩, ⟨Benedick, Benedick⟩}

例子 [Smith, pp.345]

定义一个FOL语言如下:

- 常元: m, n
- 一元谓词: F, G
- 二元谓词: L

考察下列语句的解释与真值:

1. $(\exists x\, Lmx \to Lmn)$
2. $\forall x\, (Gx \to (Lxm \lor \neg Lmx))$
3. $\forall x\, (Gx \to \exists y\, Lxy)$

对应的结构$\mathfrak{A}$如下:

- $|\mathfrak{A}|$: $\{4, 7, 8, 11, 12\}$
- 常元指派:
  - m: 7
  - n: 12
- 谓词指派:
  - F: $|\mathfrak{A}|$中的全部偶数
  - G: $|\mathfrak{A}|$中的全部奇数
  - L: $|\mathfrak{A}|$中所有满足$m < n$的有序对$\langle m, n\rangle$

当 WFF 中拥有自由变元时

定理 2.17 [Enderton, pp.86]:

若 s_1 与 s_2 是两个从 $|\mathfrak{A}|$ 到 V 的变量赋值函数，它们在 wff φ 所有自由变元（如果有的话）上的取值相等，那么

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s_1] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s_2]$$

推论 2.18 [Enderton, pp.86]：对于一个语句 σ，下列结论中必有一条成立：

1. $\mathfrak{A}$ 对于任意变元赋值函数 s 均满足 σ，这时我们称 $\mathfrak{A}$ 是 σ 的模型（*model*）
2. $\mathfrak{A}$ 对于任意变元赋值函数 s 均不满足 σ

证明思路：由于 wff 的可满足性是归纳定义的，直接使用结构归纳证明即可。

模型

对于语句

$$\exists x\,(x \cdot x = \mathbf{1} + \mathbf{1})$$

- 实数域 $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}; 0, 1, +, \cdot)^{\dagger}$ 是它的模型
- 有理数域 $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}; 0, 1, +, \cdot)$ 不是它的模型
- $\exists, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ 的解释与它们在命题逻辑中的语义一样[Enderton, pp.87]

$^{\dagger}\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots)$ 是一种非正式记法，只有在不引起歧义的时候才能不加标注地使用

FOL的逻辑有效性/逻辑蕴涵

定义2.19（逻辑蕴涵）[Enderton, pp.88]：

令Γ为wff集合，φ是一个wff。那么我们说Γ逻辑蕴涵（*logically implies, entails*）φ当且仅当对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值$s : V \to |\mathfrak{A}|$均有$\Gamma \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$。这时我们记为

$$\Gamma \vDash \varphi$$

1. 这里的逻辑蕴涵使用的（元语言）符号$\vDash$与第二章《命题逻辑》里一模一样。由于一阶逻辑包含（*subsumes*）命题逻辑（只需允许0元谓词存在），因此逻辑蕴涵包含重言蕴涵，也更接近我们在第一章《非形式化逻辑》里的定义

   定义：我们称一个推演步骤是有效的当且仅当不存在任何一种可能，令该推演的<u>前提为真且结论为假</u>。同样地，在这种情况下我们称这些前提蕴涵（entails）其结论。

2. 与之前的定义一样：
   - 记逻辑等价（*logically equivalent*）为$\gamma \vDash \dashv \varphi$或者$\gamma \simeq \varphi$
   - 若$\emptyset \vDash \varphi$则称φ是（逻辑）有效的（*valid*），简记为$\vDash \varphi$

FOL的逻辑有效性/逻辑蕴涵

定义2.19（逻辑蕴涵）[Enderton, pp.88]：

令Γ为wff集合，φ是一个wff。那么我们说Γ逻辑蕴涵（*logically implies, entails*）φ当且仅当对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值$s : V \to |\mathfrak{A}|$均有$\Gamma \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$。这时我们记为

$$\Gamma \vDash \varphi$$

推论2.20（语句的逻辑蕴涵）[Enderton, pp.88]：

对一个语句集合Σ和语句σ，$\Sigma \vDash \sigma$当且仅当Σ的任意一个模型都是σ的模型。我们称语句σ是有效的当且仅当在任意结构下σ均为真。

例子

1. $\forall v_1\, Qv_1 \vDash Qv_2$
2. $\vDash \neg\neg\sigma \to \sigma$
3. $\vDash \exists x\,(Qx \to \forall x\, Qx)$
4. [Enderton, pp.99] $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \vDash (\alpha \to \varphi)$
   - 证明:

$$
\begin{aligned}
& \Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意 } \mathfrak{A} \text{ 和赋值 } s \text{ 有 } \vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma \cup \{\alpha\}[s] \text{ 蕴涵 } \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意 } \mathfrak{A} \text{ 和赋值 } s \text{ 有 } \vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s] \text{ 蕴涵“若 } \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \text{ 那么 } \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]\text{”} \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意 } \mathfrak{A} \text{ 和赋值 } s \text{ 有 } \vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s] \text{ 蕴涵 } \vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \varphi)[s] \\
\Leftrightarrow\ & \Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

更多例子

证明以下结论[Enderton, pp.99]:

$$\{\forall x\,(\alpha \to \beta), \forall x\,\alpha\} \vDash \forall x\,\beta$$

证明:

1. 根据定义，对任意使得$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s]$和$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$成立的$\mathfrak{A}$和赋值$s$，我们有:
   - 对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s(x \mid d)]$且$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$
2. 根据$\to$符的语义，对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s(x \mid d)]$当且仅当:
   - $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$或者$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$；要么这二者均成立。因此一共有3种情况:
     - $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$且$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$
     - $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$且$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$
     - $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$且$\nvDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$
3. 我们在第一步中得知，对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$
   - 那么必然有$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$，即$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\beta[s]$

Q.E.D.

Wrap up

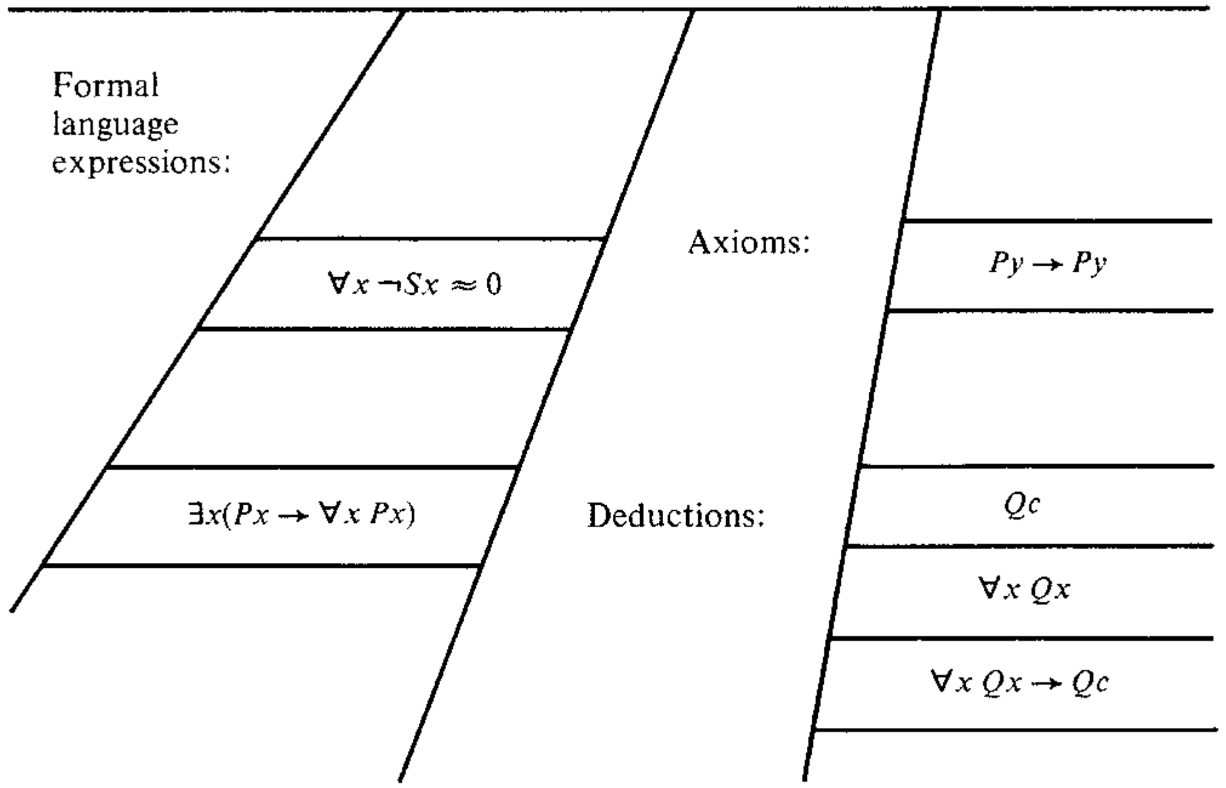
The study, in English, of the view below:

$$\text{If } \Gamma \models \varphi, \text{ then } \Gamma \vdash \varphi.$$

$$\Gamma; \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$$

$$\models_{\mathfrak{N}} \forall x \neg Sx \approx 0$$

$$\models \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)$$



可靠性与完备性

FOL远比命题逻辑复杂，还需要准备工作

结构与赋值的数量是**无穷**的！

证明可靠性与完备性的准备工作：可定义性、同态与同构

可定义性：自由变量的意义

考虑一个结构：$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; 0, S, +, \cdot)$

1. 该结构中能够定义单点集，如$\{2\}$

$$\boldsymbol{v}_1 = SS0$$

2. 尽管没有关系$<$，即集合$\{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \mid \boldsymbol{v}_1 < \boldsymbol{v}_2\}$，但这并不妨碍我们用以下公式定义它

$$\exists \boldsymbol{v}_3 \, (\boldsymbol{v}_1 + S\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2)$$

3. 素数（由于1和$<$均可定义，以下wff是合法的）

$$(1 < \boldsymbol{v}_1) \land \forall \boldsymbol{v}_2 \forall \boldsymbol{v}_3 \, (\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3 \to \boldsymbol{v}_2 = 1 \lor \boldsymbol{v}_3 = 1)$$

4. 负数和有理数，比如$-5_{\mathbb{Z}} \equiv \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$和$\frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} \equiv \langle (\boldsymbol{v}_1)_{\mathbb{Z}}, (\boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{Z}} \rangle$

$$\boldsymbol{v}_1 + 5 = \boldsymbol{v}_2 + 0; \qquad (\boldsymbol{v}_1 \cdot 2)_{\mathbb{Z}} = (\boldsymbol{v}_2 \cdot 1)_{\mathbb{Z}}$$

5. 无理数（戴德金分割）

可定义性

定义 2.21（可定义性，*definability*）[Enderton, pp.90]：

考虑一个结构 $\mathfrak{A}$ 与一个 wff φ，若 φ 的自由变元为 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$，那么我们便能够在 $\mathfrak{A}$ 中定义一个 k-元关系

$$\{\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \mid \models_{\mathfrak{A}} \varphi \llbracket \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rrbracket\}$$

我们称该 k-元关系在 $\mathfrak{A}$ 中由 φ 定义（*defines*）

- 一般地，一个 $|\mathfrak{A}|$ 上的 k-元关系在 $\mathfrak{A}$ 中可定义（*definable*）当且仅当存在一个自由变元为 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ 的 wff 恰好能够描述它

类

定义 2.22（类，*Class*） [Enderton, pp.92]：

对于一个语句集 Σ，用 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ 来表示由 Σ 的模型所组成的类。如果 Σ 是单个语句的集合 $\{\sigma\}$，则用 $\mathrm{Mod}\,\sigma$ 而不用 $\mathrm{Mod}\,\sigma$ 表示

- 由一条 FOL 语句定义的类被称为初等类（*elementary class*，*EC*），即存在一条语句 σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\sigma$
- 由 FOL 语句集合 Σ 定义的类被称为广义初等类（*elementary class in a wider sense*，EC_{Δ}）

类的例子

1. [Hao et.al., pp.96]一阶语言$\mathcal{L} = \{=, P\}$，其中P为二元谓词符号，令σ为下列3个语句的合取

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall z\,(Pxy \to (Pyz \to Pxz)) \\ \forall x \forall y\,(Pxy \lor x = y \lor Pyx) \\ \forall x \forall y\,(Pxy \to \neg Pyx)\end{gathered}$$

2. [Hao et.al., pp.97]一阶语言$\mathcal{L} = \{=, \circ, ^{-1}, e\}$，其中$\circ$和$^{-1}$分别为二元和一元函数符号，$e$为常数符号，定义下面一组语句集$\Sigma$

$$\begin{aligned}&(1)\ \forall x \forall y \forall z\,(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \\ &(2)\ \forall x\,(x \circ e = e \circ x) \\ &(3)\ \forall x\,(x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e)\end{aligned}$$

类的例子

朴素集合论中的**概括原则**：若φ是一个公式，$\boldsymbol{v}_2$是其中的自由变元，那么：

$$\exists \boldsymbol{v}_1 \forall \boldsymbol{v}_2 \left(\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_1 \leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{v}_2)\right)$$

- 最早来自于Frege的*The Foundations of Arithmetic* (1884)
- 当定义$\varphi \equiv \neg(\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2)$，那么它定义的就是一个真类而不是集合（罗素悖论）
- 为了回避该问题，ZFC选取了分离公理模式代替它

$$\forall \boldsymbol{v}_3 \exists \boldsymbol{v}_1 \forall \boldsymbol{v}_2 (\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_1 \leftrightarrow (\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_3 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}_2)))$$

同态

定义 2.23（同态，*Homomorphisms*） [Enderton, pp.94; Hao et.al., pp.100]：

令$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是FOL语言的两个结构，称函数$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$是从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的一个同态，如果它满足下列条件：

1. 对每个（不是等词的）谓词P以及每组$|\mathfrak{A}|$中的n-元组$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$，都有

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}} \text{ iff } \langle h(a_1), \ldots, h(a_n)\rangle \in P^{\mathfrak{B}}$$

2. 对每个函数符号f以及每组$|\mathfrak{A}|$中的n-元组$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$，都有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

3. 对于每个常数符号c都有

$$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$$

在上述定义中如果h是一个双射，则称h是从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的一个同构（*isomorphism*），并称$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$同构†，记为$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

†[Enderton]根据映射的大小区分了“*onto*”和“*into*”的同构。由于不影响可靠性和完备性的证明，我们采取[Hao et.al.]的术语，即“同构”指的是*onto*的同构，也即双射的同构。

同态的例子

定义自然数集合上的结构$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; +, \cdot)$，并定义一个映射$h : \mathbb{N} \to \{e, o\}$

$$h(n) = \begin{cases} e & \text{if } n \text{ is even} \\ o & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

那么h是一个$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的（满）同态，其中$\mathfrak{B} = (\{e, o\}; +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}})$，运算定义如下：

$+^{\mathfrak{B}}$	e	o
e	e	o
o	o	e

$\cdot^{\mathfrak{B}}$	e	o
e	e	e
o	e	o

容易验证，它满足定义2.23中的条件2和3

既然同态定义了结构之间的联系，
那么FOL wff的语义（真值）能够通过同态从一个结构传到另一个结构吗?

同态定理

定理 2.23（同态定理，*Homomorphism Theorem*） [Enderton, pp.96; Hao et.al., pp.100]：

假定 h 为从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的一个同态，并且 $s : V \to |\mathfrak{A}|$ 的一个赋值：

1. 对任意项 t，$h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$，其中 $\overline{s}(t)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中计算且 $\overline{h \circ s}$ 在 $\mathfrak{B}$ 中计算
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \alpha[h \circ s]$$

3. 如果 h 是单射，则 2 中的 wff α 可以包含等词
4. 如果 h 是 $|\mathfrak{A}|$ 到 $|\mathfrak{B}|$ 的满射，则 2 中的 wff α 也可以包含量词

同态定理的证明概要 [Enderton, pp.97]

1. 根据 s 和 h 的定义，对项的结构做归纳证明
2. 对（无等词和量词结构的）wff结构做归纳证明
3. 显然
4. 同样可以使用归纳法。根据归纳假设已经有 $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \varphi[h \circ s]$
   » 首先，不管 h 是否是满射都有

$$\begin{aligned}\models_{\mathfrak{B}} \varphi(h \circ s) &\Leftrightarrow \text{对任意 } e \in |\mathfrak{B}|, \models_{\mathfrak{A}} \ \varphi[(h \circ s)(x \mid e)] \\ &\Rightarrow \text{对任意 } d \in |\mathfrak{A}|, \models_{\mathfrak{B}} \ \varphi[(h \circ s)(x \mid h(d))] \\ &\Leftrightarrow \text{对任意 } d \in |\mathfrak{A}|, \models_{\mathfrak{A}} \ \varphi[s(x \mid a)]\end{aligned}$$

   » 若是满射，上面推理步骤的第 2 步显然也有 $\Leftarrow$ 成立

初等等价与自同构

定理 2.23（初等等价，*Elementarily equivalent*）[Enderton, pp.97; Hao et.al., pp.102]：

我们称一个FOL语言的两个结构$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是初等等价的，当且仅当对任意语句σ都有

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{B}} \sigma$$

记为$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。同构的两个结构初等等价，即$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

定理 2.24（自同构，*Automorphism*）[Enderton, pp.98; Hao et.al., pp.102]：

一个由结构$\mathfrak{A}$到自身的同构被称为自同构。令h是$\mathfrak{A}$的一个自同构，且R是一个在$|\mathfrak{A}|$上的n-元关系，它在$\mathfrak{A}$中可定义。则对任意$|\mathfrak{A}|$中的n-元组$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$有

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R \Leftrightarrow \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in R$$

例子 [Enderton, pp.101]

试证明：加法关系 $A = \{\langle m, n, p\rangle \mid p = m + n\}$ 在 $(\mathbb{N};\cdot)$ 中无法定义。

证明：

根据算术基本定理，$(\mathbb{N};\cdot)$是一个由全体素数与乘法生成的自由代数（交换半群），且包含一个0元。因此只要将生成元（素数）打乱顺序就可以构造自同构：

- 若 $n = \prod_p p^{n_p}$，那么我们定义 $h(n) = 2^{n_3} \cdot 3^{n_2} \prod_{p\geq 5} p^{n_p}$，显然它是一个一一映射
- 易证 h 关于乘法是一个自同构：对于 $n = \prod_p p^{n_p}$ 和 $m = \prod_p p^{m_p}$ 有

$$h(n\cdot m) = h(\prod_p p^{n_p+m_p}) = 2^{n_3+m_3} \cdot 3^{n_2+m_2} \prod_{p\geq 5} p^{n_p+m_p} = h(n)\cdot h(m)$$

- 然而 $\langle 1,1,2\rangle \in A$ 但 $\langle h(1), h(1), h(2)\rangle = \langle 1,1,3\rangle \notin A$，根据定理2.24可知 A 在该结构中无法定义

Q.E.D.

可靠性

FOL的可靠性

定理 2.25（可靠性定理，*Soundness Theorem*）[Enderton, pp.131]：

若$\Gamma \vdash \varphi$，则$\Gamma \vDash \varphi$

若有下面这条引理，根据蕴含连词的解释与逻辑蕴含的定义，可靠性的证明将非常简单

引理 2.26[Enderton, pp.131]：

所有逻辑公理均是有效的，即对任意$\varphi \in \Lambda$均有$\vDash \varphi$

FOL的可靠性

可靠性的证明（假设引理成立）：

根据证明的定义进行归纳证明：

1. **奠基**：证明长度为1时有以下两种情况：
   - $\varphi \in \Lambda$是逻辑公理，那么根据引理2.26有$\vDash \varphi$，因此$\Gamma \vDash \varphi$
   - $\varphi \in \Gamma$，显然有$\Gamma \vDash \varphi$
2. **归纳**：假设证明长度小于n时可靠性定理成立，当证明长度为n时：
   - 若$\varphi \in \Lambda \cup \Gamma$，则与奠基情况相同，否则
   - φ从ψ与$\psi \to \varphi$通过MP规则推导而来：根据归纳假设有$\Gamma \vDash \psi$且$\Gamma \vDash (\psi \to \varphi)$
     - 注意：这里我们使用的是定义2.7中定义的第一套公理系统，其中只有一条MP推理规则。对于有多条推理规则的系统的可靠性证明请见[Open Logic; Hao et.al.]对应章节
   - 又根据蕴含连词的解释可知$\Gamma \vDash (\psi \to \varphi)$当且仅当$\nvDash \psi$或$\vDash \varphi$
   - 前者与归纳假设中的$\Gamma \vDash \psi$矛盾，因此有$\vDash \varphi$

Q.E.D.

FOL公理的有效性

公理的概括：任意有效公式的概括仍然是有效的，即

$$\models \varphi \;\Rightarrow \models \forall x\, \varphi$$

证明:

φ是有效的，当且仅当

- 对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值函数s有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$，当且仅当
- 对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值函数s均有：对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]$
  - （$\Rightarrow$）$s(x \mid d)$是一种赋值函数
  - （$\Leftarrow$）由d的任意性，只需令$d = s(x)$就有$s = s(x \mid s(x))$

  当且仅当
- 对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值函数s有$\models_{\mathfrak{A}} \forall x, \varphi[s]$，即$\models \forall x\, \varphi$成立

Q.E.D.

FOL公理的有效性

第一组公理：命题逻辑中的重言式在FOL中是有效的。

证明:

若以下引理成立，那么只需取$\Gamma = \emptyset$即可令以上结论成立。

引理[Enderton, pp.129]:

令$\mathfrak{A}$是一个结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个赋值。定义一个在所有素公式†（*prime formulas*）α上的真值指派v如下

$$v(\alpha) = T \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$$

那么对任意wff φ（不管是否为素公式）均有

$$\overline{v}(\varphi) = T \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$$

进一步，若$\Gamma \models \varphi$，那么$\Gamma \models \varphi$

† 素公式指所有原子公式以及形如$\forall x\, \alpha$的公式[Enderton, pp.114]

FOL公理的有效性

第一组公理：命题逻辑中的重言式在FOL中是有效的。

证明（Cont'd）：

1. 对wff的结构进行归纳：
   - 对于每个可以看作语句的素公式，$\bar{v}(\alpha) = v(\alpha)$当且仅当$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$
   - 对于$\neg\varphi$形式的wff，$\bar{v}(\neg\varphi) = T$当且仅当$v(\varphi) = F$
     - 根据$\neg$的解释以及归纳假设得$\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$当且仅当$\nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$
   - 对于形如$\psi \to \varphi$的wff，$\bar{v}(\psi \to \varphi) = T$当且仅当$v(\psi) = F$或者$v(\varphi) = T$
     - 根据$\to$的解释以及归纳假设得$\vDash_{\mathfrak{A}} (\psi \to \varphi)[s]$当且仅当$\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$或者$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$
2. 根据重言蕴含的定义，$\Gamma \vDash \varphi$意味着：
   - 对任意结构$\mathfrak{A}$和赋值s，任意$\psi \in \Gamma$均有若$\bar{v}(\psi[s]) = T$那么必有$\bar{v}(\varphi[s]) = T$。
     - 根据上面的结论，即：对任意结构$\mathfrak{A}$和赋值s，任意$\psi \in \Gamma$均有若$\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$那么必有$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$，也就是$\Gamma$逻辑蕴含$\varphi$ Q.E.D.

FOL公理的有效性

以下公理均是有效的（证明留作习题）

- 第三组公理：$\vDash \forall(\alpha \to \beta) \to (\forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta)$
- 第四组公理：$\vDash \alpha \to \forall x\, \alpha$，其中$x$不在$\alpha$中自由出现
- 第五组公理：$\vDash x = x$
- 第六组公理：$\vDash (x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中$\alpha$为原子公式，$\alpha'$为对$\alpha$中的$x$进行0次或多次替换后得到的wff

第二组公理的有效性

第二组公理：$\vDash \forall x\, \alpha \to \alpha_t^x$，其中$t$对于$\alpha$中的$x$是可替换的

先看一个简单的例子：$\forall x\, Px \to Pt$是有效的。假设

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px[s]$$

根据定义，对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px[s(x \mid d)]$$

我们可以令$d = \bar{s}(t)$，那么就有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px[s(x \mid \bar{s}(t))]$$

根据谓词的解释，也就是说

$$\bar{s}(t) \in P^{\mathfrak{A}}$$

也即$\vDash_{\mathfrak{A}} Pt[s]$

第二组公理的有效性

我们希望将这种"先赋值，再替换"与"先替换，再赋值"的语义等价性扩张到更复杂的wff中，即

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi_t^x[s]$$

其中t可以替换φ中的x。这个性质可以被总结为下面的引理

引理 2.27 [Enderton, pp.133]：

对于一个结构$\mathfrak{A}$和赋值s，对任意项u，令u_t^x为将u中的x替换为t后的结果，那么

$$\bar{s}(u_t^x) = \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u)$$

换言之，一个替换既可以发生在项（语法）中，也可以发生在赋值（语义）里，且二者是等价的

替换引理

引理 2.27 [Enderton, pp.133]： $\bar{s}(u^x_t) = \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u)$

证明：直接对项u的结构进行归纳。

1. **奠基**：
   - 若u是一个常元或非x变元，那么上式退化为$\bar{s}(u) = \bar{s}(u)$
   - 若$u = x$则上式退化为$\bar{s}(t) = \bar{s}(t)$
2. **归纳**：假设结论对项构造算子施加次数小于n时成立
   - 那么$u = fu_1 \cdots u_n = f(u_1, \dots u_n)$时，$u^x_t = f((u_1)^x_t, \dots, (u_n)^x_t)$
   - 根据项的解释，有$\bar{s}(u^x_t) = \bar{s}(f((u_1)^x_t, \dots, (u_n)^x_t))$
   - 在$\mathfrak{A}$中即$f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}((u_1)^x_t), \dots, \bar{s}((u_n)^x_t))$
   - 根据归纳假设，即$f^{\mathfrak{A}}(\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_1), \dots, \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_n))$
   - 根据项的解释，即$\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(f(u_1, \dots u_n))$

替换引理

引理 2.28（替换引理，*Substitution Lemma*）[Enderton, pp.133]：

若项 t 可以替换 wff φ 中的变元 x，那么

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))]$$

证明：对 wff φ 的结构进行归纳。

- **奠基**：φ 为原子公式。那么根据引理 2.27 可知该结论成立。例如 $\varphi \equiv Pu_1 \cdots u_n$ 则

$$\begin{aligned}
& \models_{\mathfrak{A}} (Pu_1 \cdots u_n)^x_t[s] & \\
\iff & (\bar{s}((u_1)^x_t), \ldots, \bar{s}((u_n)^x_t)) \in P^{\mathfrak{A}} & \text{Def.} \\
\iff & (\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_1), \ldots, \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_n)) \in P^{\mathfrak{A}} & \text{Lemma 2.27} \\
\iff & \models_{\mathfrak{A}} (Pu_1 \cdots u_n)[\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}] &
\end{aligned}$$

替换引理

证明（Cont'd）：

- **归纳**：假设替换引理对构造次数小于n的wff成立
  - 若φ为形如$\neg\psi$或$\psi\to\theta$的wff，根据$\neg$和$\to$的解释，替换引理显然对它们成立
  - 若φ为形如$\forall y\,\psi$，需要根据可替换的定义分情况讨论：
    1. x在φ中未自由出现，那么s与$s(x\mid\bar{s}(t))$在φ中所有自由变元的取值相同，所以$\varphi^x_t=\varphi$，结论显然成立
    2. x在φ中自由出现。由于t可以替换φ中的x，因此y不在t中出现且t可替换ψ中的x
       - 因为y不在t中出现，所以对任意$d\in|\mathfrak{A}|$有$\bar{s}(t)=\overline{s(y\mid d)}(t)$ (*)
       - 由于$x\neq y$，$\varphi^x_t=\forall y\,\psi^x_t$，那么有

$$
\begin{array}{lll}
\models_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s] & \text{iff 对任意 } d,\ \models_{\mathfrak{A}} \psi^x_t[s(y\mid d)] & \text{定义} \\
 & \text{iff 对任意 } d,\ \models_{\mathfrak{A}} \psi[s(y\mid d)(x\mid \bar{s}(t))] & \text{归纳假设 \& (*)} \\
 & \text{iff}\qquad\quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x\mid \bar{s}(t))] &
\end{array}
$$

因此，原命题对任意wff均成立 Q.E.D.

第二组公理的有效性

第二组公理是逻辑有效的，即$\vDash \forall x\, \varphi \to \varphi^x_t$，其中$t$对于$\alpha$中的$x$是可替换的

证明:

假设t可以在φ中替换x，且$\vDash_{\mathfrak{A}} (\forall x\, \varphi)[s]$，即需要证$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))]$

已知对任意$d \in |\mathfrak{A}|$

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]$$

那么就可以令$d = \bar{s}(t)$，有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))]$$

根据替换引理可知

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s]$$

由于$\mathfrak{A}$和s的任意性，有$\vDash \forall x\, \varphi \to \varphi^x_t$成立。进而，FOL的公理均是逻辑有效的，这也完成了可靠性定理的证明

Q.E.D.

FOL可靠性定理的推论

推论2.29[Enderton, pp.134]：

若$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$，那么$\varphi$与$\psi$逻辑等价

推论2.30[Enderton, pp.134]：

若φ'是φ的一个alphabetic variant，那么它们是逻辑等价的

推论2.31[Enderton, pp.134]：

若Γ是可满足的，那么它是一致的

Gödel完备性定理