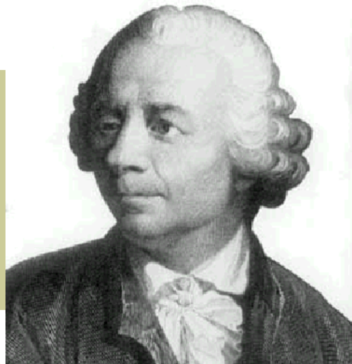
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学

Discrete Mathematics

第十八讲：子群与群的分解

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

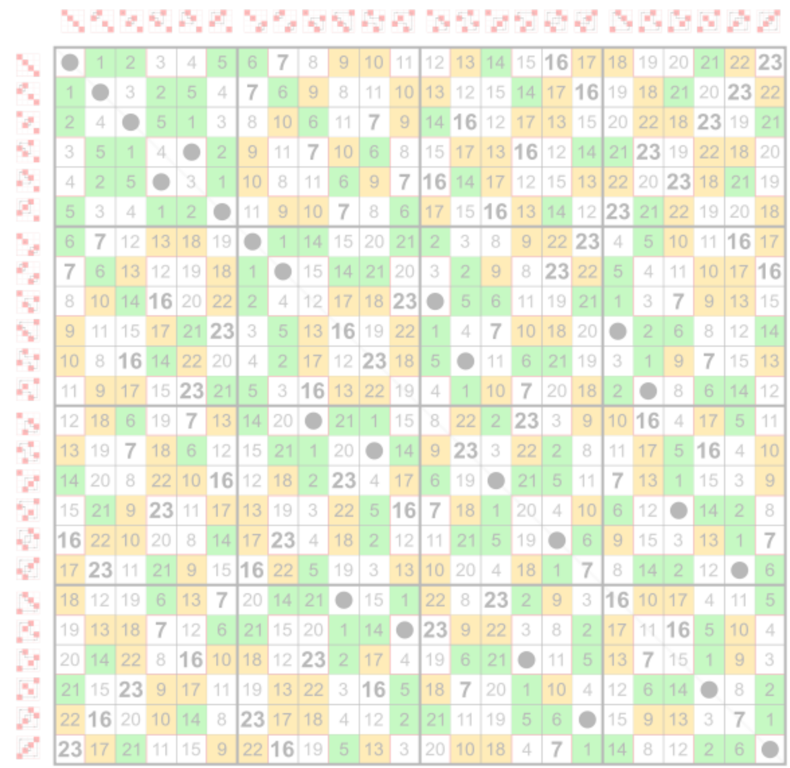
2020 年 4 月 15 日

前 情 提 要

- 对称的代数
- 半群
- **Monoid**
- 群
- 群论公理
- 群的性质

本讲主要内容

- 子群的定义
- 子群的判定定理
- 有限子群的判定定理
- 群中元素的阶
- 陪集与集合的划分
- Lagrange定理



子群

- 子群是群的子代数（subalgebra）
- 定义（子群）：

设$\langle G, *, e, ^{-1} \rangle$为群，$H \subseteq G$，若：

(1) $(\forall x, y \in H)(x * y \in H)$（运算封闭性）

(2) $e \in H$（单位元封闭性）

(3) $(\forall x \in H)(x^{-1} \in H)$（逆元封闭性）

则称$\langle H, * \rangle$为$\langle G, * \rangle$的子群（subgroup），记为$\langle H, * \rangle \leq \langle G, * \rangle$，

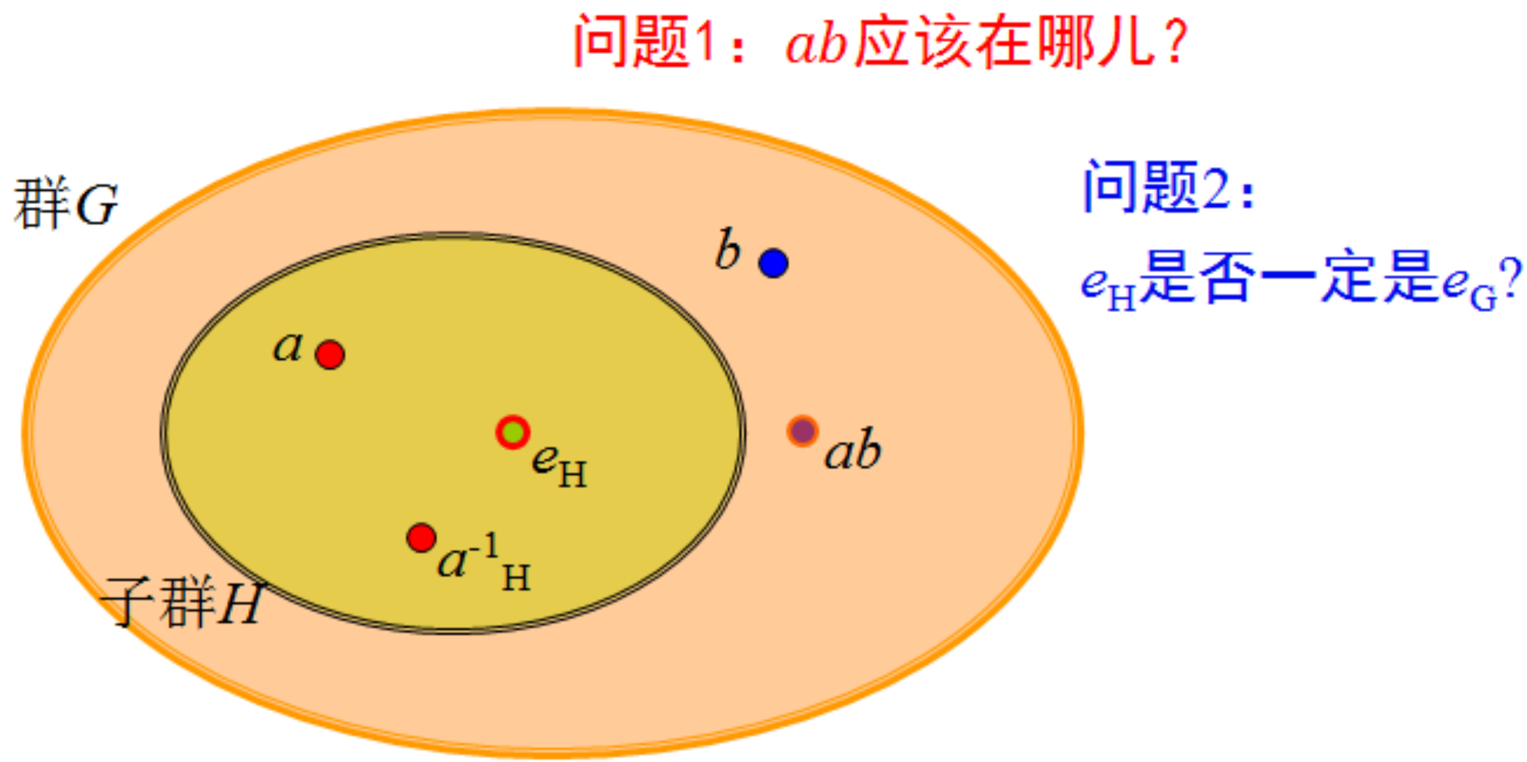
若$H \subset G$，称$\langle H, * \rangle$为$\langle G, * \rangle$的真子群，记为$\langle H, * \rangle < \langle G, * \rangle$

子 群（续）

- 设$\langle G,*,e,^{-1}\rangle$为群，则$\langle \{e\},*\rangle \le \langle G,*\rangle$和$\langle G,*\rangle \le \langle G,*\rangle$称为$G$的平凡子群（trivial subgroup）
- 子群的例子：
  - $\langle \mathbb{Z},+\rangle \le \langle \mathbb{R},+\rangle$
  - $\langle b\mathbb{Z},+\rangle \le \langle \mathbb{Z},+\rangle, b \in \mathbb{Z}$

子群的判定定理

- 考虑子群的存在条件：



子群的判定定理（续）

- 定理（子群判定定理）：

设$\langle G,*,e,^{-1}\rangle$为群，$H \subseteq G$，以下四点等价：

(a) $\langle H,*\rangle \le \langle G,*\rangle$

(b) $\langle H,*,e,^{-1}\rangle$ 为群

(c) (c.1) $H \neq \emptyset$

(c.2) $(\forall a,\ b \in H)(ab \in H)$

(c.3) $(\forall a \in H)(a^{-1} \in H)$

(d) (d.1) $H \neq \emptyset$ (d.2) $(\forall a,\ b \in H)(ab^{-1} \in H)$

子群的判定定理（续）

证明：$(a) \Rightarrow (b)$: 设 $\langle H,*\rangle \le \langle G,*\rangle$ ，由子群定义易得 $\langle H,*,e,^{-1}\rangle$ 为群。

$(b) \Rightarrow (c)$: 设 $\langle H,*,e,^{-1}\rangle$ 为群

$\because e \in H$

$\therefore$(c.1) $H \neq \emptyset$ 成立。(c.2)与(c.3)易见。

$(c) \Rightarrow (d)$: $\forall a, b \in H$，由(c.3)知$b^{-1} \in H$,

又由(c.2)得$ab^{-1} \in H$。

$(d) \Rightarrow (a)$: 由(d.1)知，$H \neq \emptyset$，取$b \in H$,

从而由(d.2)知$bb^{-1} = e \in H$,

从而$\forall a \in H$，由(d.2)得$ea^{-1} \in H$，即$a^{-1} \in H$.

又$\forall a$，$b \in H$，我们有a，$b^{-1} \in H$,

由(d.2)知，$a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

我们在验证$\langle H,*\rangle$是否为$\langle G,*\rangle$子群时，只需验证H非空且运算$*$，$^{-1}$对H封闭。

有限子群的判定定理

- 定理（有限子群判定定理）：

  设G为群，H是G的非空有穷子集，则H是G的子群当且仅当：$\forall a, b \in H, ab \in H$

有限子群的判定定理（续）

- **证明：**

必要性：显然；

充分性：只需要证明对$a \in H, a^{-1} \in H$：任取$a \in H$，若$a = e$则$a^{-1} = e \in H$；若$a \neq e$，令$S = \{a, a^2, a^3, \cdots\}$，则$S \subseteq H$。因为$H$是有穷集，必有$a^i = a^j$；不妨设$i < j$，根据消去律，有$a^{j-i} = e$，由于$a \neq e$，故$j - i > 1$，由此可得：$a^{j-i-1}a = e$且$aa^{j-i-1} = e$。从而$a^{-1} = a^{j-i-1} \in H$. □

群中元素的阶

- **定义（元素的阶）：**

设 $\langle G,*\rangle$ 为群，$n \in Z$，$a \in G$，以下定义a^n:

若$n \geq 0$，则a^n已在上讲定义。

若$n < 0$，则$a^n = (a^{-n})^{-1}$。

若$(\exists n \in \mathbb{N}^+)(a^n = e)$，则称$a$的阶(order)是有穷的且记$a$的阶$|\ a\ | = min\{n > 0 \mid a^n = e\}$。

若$\neg\,(\exists n \in \mathbb{N}^+)(a^n = e)$，则称$a$的阶是无穷的，且记$a$的阶$|\ a\ | = \infty$。

性质:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

群中元素的阶（续）

- 例：

在Kleine 4群$\langle V,*\rangle$中，$|e|=1$，当$a\neq e$时，$|a|=2$。

在$\langle \mathbb{Z}_7,\oplus_7\rangle$中，$|0|=1$, $a\neq 0$, $|a|=7$。

在$\langle \mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$中，各元素的阶如下：

元素	0	1	2	3	4	5
阶	1	6	3	2	3	6

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

群中元素的阶（续）

- 定理（元素的阶的性质）：

设$\langle G,*\rangle$，a，$b\in G$，$|a|$，$|b|$为有穷

(1) 对$k\in\mathbb{Z}^+$，$a^k=e\Leftrightarrow |a| \mid k$

(2) $|a|=|a^{-1}|$

(3) $|ab|=|ba|$

(4) $|b^{-1}ab|=|a|$

群中元素的阶（续）

- (1) 对$k \in \mathbb{Z}^+$， $a^k = e \Leftrightarrow |a| \mid k$

证明：(1) “$\Rightarrow$”，设$|a| = m > 0$，$m = min\{k \mid a^k = e \wedge k > 0\}$

故$k \geq m$，从而$k = q \times m + r$，这里$0 \leq r < m$

$\because a^k = a^{qm} * a^r = (a^m)^q * a^r = e^q * a^r = a^r$

$\therefore a^r = e$

$\because r < m$

$\therefore r = 0$，从而$k = q \times m$，故$m \mid k$。

“$\Leftarrow$”，设$|a| = r$

$|a| \mid k \rightarrow r \mid k \rightarrow k = n \times r \rightarrow a^k = a^{n \times r} = (a^r)^n = e^n = e$

群中元素的阶（续）

(3) $|ab|=|ba|$

(4) $|b^{-1}ab|=|a|$

(2)令$|a|=r$

$\because (a^{-1})^r=(a^r)^{-1}=e^{-1}=e$

$\therefore |a^{-1}| \mid |a|$，同理$|a| \mid |a^{-1}|$，故$|a^{-1}|=|a|$。

(3)$(ab)^{n+1}=abab\cdots ab=a(ba)^n b$

Case 1: ab的阶有穷，设为r

从而$(ab)^{r+1}=a(ba)^r b$

从而$ab=a(ba)^r b$，故$(ba)^r=e$

故ba的阶有穷，设为r'，由(1)知$r' \mid r$

同理$|ba|=r'$时有$|ab|$有穷，若为r,则$r \mid r'$

因此$|ab|=|ba|$. (4) 由(3)可知，$|b^{-1}ab|=|abb^{-1}|=|ae|=|a|$

群中元素的阶（续）

- **例题**：设$\langle G,*\rangle$为群，试证明：若$|G| = n$，则G中阶大于2的元素有**偶数个**

证明：

对于$a \in G$，若$|a| > 2$，则$a \neq a^{-1}$，若不然，则$a = a^{-1}$，从而$a^2 = e$，故$|a| \leq 2$与$|a| > 2$矛盾！因此我们有$|a| > 2 \rightarrow a \neq a^{-1}$，故$G$中阶$> 2$的元素$a$与其逆$a^{-1}$成对出现，因此$G$有偶数个阶$> 2$的元素。

陪集与群的分解

- 以下讨论群论中一个深远的问题：

子群将群分解为陪集（coset）

- 定义（陪集）：设$\langle H,*\rangle \le \langle G,*\rangle, a \in G$，令：

  $$Ha = \{ha|h \in H\},\ \ aH = \{ah|h \in H\}$$

  称Ha(或aH)为子群H在G中的右(或左)陪集，H在G中右(或左)陪集的个数称为H在G中的指数(index)，记为$[G:H]$

陪 集（续）

- 例1：令$H=\{2n|n\in\mathbb{Z}\}$，$\langle H,+\rangle\le\langle\mathbb{Z},+\rangle$，$a\in\mathbb{Z}$，$Ha=\{2n+a|n\in\mathbb{Z}\}$，$\because$对$k\in\mathbb{Z}, H(2k+1)=\mathbb{Z}-H$，$H(2k)=H$，$\therefore[\mathbb{Z}:H]=2$，易见$aH=Ha$
- 例2：$\langle\mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$为群，令$H=\{0,3\}$，则$\langle H,\oplus_6\rangle\le\langle\mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$，且$H0=H, H1=\{1,4\}, H2=\{2,5\}$

  $H3=\{3,0\}=H, H4=\{4,1\}=H1, H5=\{5,2\}=H2$，因此$[\mathbb{Z}_6:H]=3$，易见$\cup\{Ha|a\in\mathbb{Z}_6\}=\mathbb{Z}_6$

陪集与划分

- 定理（陪集与划分）：设$\langle H,*\rangle \le \langle G,*\rangle$,

(1) $He = H$

(2) $(\forall a \in G)(a \in Ha)$ 从而 $\bigcup\{Ha|a \in G\} = G$

(3) $(\forall a, b \in G)(Ha = Hb \vee Ha \cap Hb = \emptyset)$

(4) $\{Ha|a \in G\}$为G之划分

陪集与划分

证 (1)易见

(2)$\because a = ea$而$e \in H$ $\therefore a \in Ha$从而$\cup\{Ha \mid a \in G\} = G$

(3) 任给a, $b \in H$, 欲证$Ha = Hb \vee Ha \cap Hb = \emptyset$, 只需证

$Ha \cap Hb \neq \emptyset \rightarrow Ha = Hb$. 设$Ha \cap Hb \neq \emptyset$, 则有$h_1, h_2 \in H$

使$h_1 a = h_2 b$, 从而任给$h \in H$, $ha = hh_1^{-1} h_2 b \in Hb$

故$Ha \subseteq Hb$同理$Ha \supseteq Hb$, 因此$Ha = Hb$.

(4) 由(1),(2),(3)即得

陪集等价关系

- 定义 “右陪集关系” ：设$\langle H,*\rangle \le \langle G,*\rangle$，定义$G$上的二元关系$\boldsymbol{R}$：

$$(\forall a,b \in G)\ a\boldsymbol{R}b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

则$\boldsymbol{R}$是G上的等价关系，且$[a]_{\boldsymbol{R}} = Ha$

- 相应地，可以定义 “左陪集关系” $\boldsymbol{R}'$：

$$(\forall a,b \in G)\ a\boldsymbol{R}'b \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

陪集等价关系（续）

- 引理（陪集相等的判定）：设$\langle H,*\rangle \leq \langle G,*\rangle$，

  则$\forall a, b \in G$：

$$a \in Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha = Hb$$

证明： 见[屈婉玲] p.188 Th. 10.8 的证明或

课后习题

陪集等价关系（续）

- **证明（右陪集关系是等价关系）：** 对于群G的子群H，$(a,b) \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$，则二元关系$\boldsymbol{R}$ 满足:
  - **自反性：** $\forall a \in G, aa^{-1} = e \in H \Leftrightarrow (a,a) \in \boldsymbol{R}$;
  - **对称性：** $\forall a,b \in G, (a,b) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1} \in H \Rightarrow (b,a) \in \boldsymbol{R}$;
  - **传递性：** $\forall a,b,c \in G, (a,b) \in \boldsymbol{R} \wedge (b,c) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow ab^{-1} \in H \wedge bc^{-1} \in H \Rightarrow (ab^{-1})(bc^{-1}) = a(b^{-1}b)c^{-1} = ac^{-1} \in H \Rightarrow (a,c) \in \boldsymbol{R}$.

  因此关系$\boldsymbol{R}$是等价关系。下面证明$\forall a \in G, [a]_{\boldsymbol{R}} = Ha$:
  $\forall b \in G, b \in [a]_{\boldsymbol{R}} \Leftrightarrow (a,b) \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha = Hb \Leftrightarrow b \in Ha$ (由引理及$b \in Hb$). □

陪集与群的分解

- 事实上，对群$\langle G,*\rangle$和$\langle H,*\rangle \le \langle G,*\rangle$，若$a,b \in G$，以下5个命题等价：

(1) $a \in Hb$　　(2) $b \in Ha$　　……陪集元素

(3) $ab^{-1} \in H$　　(4) $ba^{-1} \in H$　　……等价关系

(5) $Ha = Hb$　　……等价类（i.e.划分块）

Lagrange 定理

- 引理（陪集的势）：

  设$\langle H,*\rangle \leq \langle G,*\rangle$，$a \in G$，则$H \approx Ha \approx aH$

- 证明：

  令$\tau: H \to Ha$为$\tau(h) = ha$，$\sigma: H \to aH$为$\sigma(h) = ah$，由消去律可知τ, σ为1-1，易见τ, σ亦为onto，故$H \approx Ha$，$H \approx aH$

Lagrange 定理（续）

- 由上面的讨论可知，右陪集构成群的元素的一个划分，每个元素恰属某个右陪集，对于有限群而言，我们即可得到以下具有重要地位的经典结果：
- 定理(**Lagrange, 1771**)：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$\langle H,*\rangle \leq \langle G,*\rangle$，则 $|G| = |H| \cdot [G:H]$

Lagrange 定理（续）

- Lagrange定理：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$\langle H,*\rangle \leq \langle G,*\rangle$，则$|G| = |H| \cdot [G:H]$
- **证明：** 由于$|G|$有穷，故$[G:H]$有穷且设为N，从而有$a_1, \cdots, a_N \in G$使$\{Ha_i | 1 < i \leq N\}$为G之划分，故$G = \bigcup_{i=1}^{N} Ha_i$；由引理，对任意$i,j$: $|Ha_i| = |Ha_j| = |H|$ $\therefore |G| = |H| \cdot N$即$|G| = |H| \cdot [G:H]$. □

Lagrange 定理（续）

- 推论1：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$a\in G$，则$|a|$为$|G|$的因子
- 证明*：设$|a|=r$，因为$\langle\langle a\rangle,*\rangle\leq\langle G,*\rangle$，由Lagrange定理，$|\langle a\rangle|$为$|G|$的因子，又由于$|a|$有穷，$\langle a\rangle=\{a^0=e,a^1,a^2,\cdots,a^{r-1}\}$，故$|\langle a\rangle|=|a|$，故$|a|$为$|G|$的因子. □
  - 注：$\langle a\rangle=\{a^n|n\in\mathbb{Z}\}$，$\langle\langle a\rangle,*\rangle$称元素$a$的生成子群，将在第14讲详述

Lagrange 定理（续）

- 推论2*：设$\langle G,*\rangle$为p阶群，若p为质数，则

  $(\exists a \in G)(\langle a\rangle = G)$

证：设$|G| = p$为素数，可以取$a \neq e$，$a \in G$,由上推论知

$|\langle a\rangle|$为$|G|$的因子，$\because |\langle a\rangle| \geq 2 \ \therefore |\langle a\rangle| = p$

故$G = \langle a\rangle$

Lagrange 定理（续）

命题：如果群 G 只含 1 阶和 2 阶元，则 G 是 Abel 群.

证　设 a 为 G 中任意元素，有 $a^{-1}=a$. 任取 $x,y\in G$，则

$$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx,$$

因此 G 是 Abel 群.

例　证明 6 阶群中必含有 3 阶元.

证　设 G 是 6 阶群，则 G 中元素只能是 1 阶、2 阶、3 阶或 6 阶.

若 G 中含有 6 阶元，设 6 阶元是 a，则 a^2 是 3 阶元.

若 G 中不含 6 阶元，下面证明 G 中必含有 3 阶元.

如若不然，G 中只含 1 阶和 2 阶元，即$\forall a\in G$，有 $a^2=e$，

由命题知 G 是 Abel 群. 取 G 中 2 阶元 a 和 b，$a\neq b$，令

$$H=\{e,a,b,ab\}$$

则 $H\leq G$，但 $|H|=4$，$|G|=6$，与拉格朗日定理矛盾.

本次课后作业

- 教材内容：[屈婉玲] 10.2节
- 课后习题：
  - 请见“教学立方”
- 提交时间： 见 “教学立方”

伽罗瓦(1811-1832)的遗书

我请求我的爱国同胞们，我的朋友们，不要指责我不是为我的国家而死。

我是作为一个不名誉的风骚女人和她的两个受骗者的牺牲品而死的。我将在可耻的诽谤中结束我的生命。噢！为什么要为这么微不足道的，这么可鄙的事去死呢？我恳求苍天为我作证，只有武力和强迫才使我在我曾想方设法避开的挑衅中倒下。

我亲爱的朋友：

我已经得到分析学方面的一些新发现……

在我一生中，我常常敢于预言当时我还不十分有把握的一些命题。但是我在这里写下的这一切已经清清楚楚地在我的脑海里一年多了，我不愿意使人怀疑我宣布了自己未完全证明的定理。

请公开请求雅可比或高斯就这些定理的重要性（不是就定理的正确与否）发表他们的看法。然后，我希望有人会发现将这一堆东西整理清楚会是很有益处的一件事。

热烈地拥抱你，

—— 伽罗瓦